Texty k přednášce

Matematické struktury

Aleš Pultr

Katedra aplikované matematiky a ITI,

MFF University Karlovy, 2005

Obsah

Místo úvodu

V letním semestru školního roku 2005/2006 je pro některé obory informatiky zaváděn předmět "Matematické struktury". Jeho úkolem je

- shrnout některé věci, kterým se studenti v dosavadním studiu naučili a ukázat na některé obecné zákonitosti,
- doplnit partie, kterým v předchozím studiu pozornost věnována nebyla, třebaže tvoří podstatnou část základů teorie informatiky (to se týká zejména otázek spojených s částečným uspořádáním),
- a rozšířit znalosti z předchozího (studenti se něco dozvěděli o metrických prostorech, v informatice však často potřebují spíš prostory obecnější; měli některé konkretní partie z algebry, mají-li se však zabývat teoretickou informatikou, neuškodí jim příprava obecnějšími otázkami universální algebry).

Při studiu předmětu se širším rozsahem je vždy trochu problematické doporučovat a shánět literaturu. Proto byl připraven tento text, který více než pokrývá požadovanou látku. Studenty bych rád hned uklidnil: nelekněte se, samozřejmě nebude ke zkoušce předepsáno všechno. Některá místa jsou prostě doplněním daného thematu, jiná zase mohou sloužit jako informace, ke které se čtenář třeba později vrátí.

Text je (prozatím) rozdělen do šesti kapitol.

První z nich má dvě části. Nejprve jsou zde úmluvy z teorie množin; jedná se o fakta, která student zná odjinud, je jen třeba se (1) dohodnout o značení a (2) zdůraznit, co bude v dalším potřeba. V druhé části jsou jednoduchá fakta o relacích, relačních systémech, homomorfismech a základních konstrukcích. Jsou to opravdu velmi jednoduché (a trochu nudné) záležitosti, čtenář by jim ale pozornost věnovat měl kvůli analogiím, které se budou stále vracet v dalším.

Kapitoly druhá a třetí jsou věnovány částečným uspořádáním a jejich speciálním případům. V teoretické informatice hrají uspořádání a otázky s nimi spojené základní roli, a student by jim měl věnovat zvláštní pozornost (přál bych si, aby v těchto kapitolách měl spíš pocit, že se pro své potřeby nedozvěděl dost). V kapitole druhé jsou předložena základní fakta, v kapitole třetí najdeme algebraické aspekty speciálních uspořádání.

V kapitole čtvrté se věnujeme základním pojmům universální algebry. Kromě obecných definic a konstrukcí se věnujeme volným algebrám, a dokazujeme velmi zásadní Birkhoffovu větu o systémech algeber popsaných rovnicemi.

Kapitoly pátá a šestá se zabývají otázkami topologickými. Vycházíme z toho, že byl student již v prvním ročníku seznámen s metrickými prostory, což je pro chápání struktury prostoru výborný základ. V teoretické informatice i jinde bude ale potřebovat obecnější pojmy a o těch by se měl něco dozvědět zde. Je tomu věnována celá kapitola pátá (topologie) a druhá část kapitoly šesté (uniformita). První část šesté kapitoly doplňuje znalosti z metrických prostorů.

Nejsou zde, v žádném smyslu, předkládána definitivní skripta. V perspektivě uvažujeme s Annou Tozzi o podstatně rozsáhlejším textu (jehož by toto bylo základem), který by mohl sloužit i doktorandům. Měl by jistě obsahovat základy teorie kategorií (které jsou zde úplně zanedbány), speciálnější topologické otázky spojené s informatikou, více o částečných uspořádáních v informatice, něco o dualitách, atd. Očekávám, že též zkušenosti s přednáškou poskytnou užitečné podněty.

Odkazy. Odkazujeme-li na bod v jiné kapitole, je tato vyznačena římskou číslicí: třeba, "... viz IV.3.1" odkazuje na bod 3.1, jsme-li v kapitole jiné. Jsme-li v téže kapitole, římskou číslici vynecháváme.

Kapitola I

Množiny, relace, zobrazení

1. Množiny : dohoda o značení

1.1. Jako obvykle bude prázdná množina označována symbolem $\emptyset$ a náležení symbolem $\in$. Inklusi, raději než $A \subset B$, budeme označovat

$$A \subseteq B.$$

Inkluse je důležité částečné uspořádání a udržujeme analogii se symbolem $\leq$.

1.2. Množiny dané výčtem obvykle označujeme

$$\{a, b\}, \quad \{x\}, \quad \{x_1, x_2, \ldots\}, \quad \{A_1, \ldots, A_n\}$$

a podobně. Množinu všech prvků dané vlastnosti $\mathcal{V}$ píšeme jako

$$\{x \mid \mathcal{V}(x)\},$$

případně vyznačíme část specifikace před znaménkem $|$, jako v

$$\{a \in A \mid \mathcal{V}(a)\}$$

(třeba, $\{A \mid A \subseteq X\}$, nebo $\{x \mid x \text{ reálné}, \ x \geq 5\}$ i $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$).

Pro *soubory*, t.j. soustavy prvků s případným opakováním a pořadím určeným nějakými prostředky (explicite zapsaným pořadím jako v (a, b) nebo $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pomocí indexů $(x_i)_{i \in J}$ nebo "funkčních hodnot" $(x(i))_{i \in J}$, a podobně) nikdy neužíváme složených závorek. Obvykle užíváme závorek prostých, nebo (jako u posloupností $x_1, x_2, \ldots$) závorky vůbec vynecháme.

1.3. Sjednocení a průniky budou označovány běžným způsobem ($A \cup B$, $A \cap B$, $\bigcup_{i \in J} A_i$, $\bigcap_{i \in J} A_i$ a pod.); připomínáme, že pro $\mathcal{A}$ soustavu množin je

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \quad \text{a} \quad \bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A.$$

1.4. Soubory typu (x, y) se nazývají *uspořádané dvojice*. Podobně *uspořádané trojice* (x, y, z), *čtveřice*, n*-tice* $(x_1, \dots, x_n)$.

> **Poznámka.** Z kursu teorie množin čtenář asi zná různé popisy uspořádaných množin pomocí "neuspořádaných systémů", jako třeba $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$. Uvědomte si, že tam jde o to, zakodovat uspořádanou dvojici pomocí náležení, ne o vysvětlení toho, co je pořadí; co přijde dříve a co později musíme umět poznat bez toho, už kvůli čtení jakýchkoli formulí, konec konců i formule nahoře.

Kartézský součin množin X, Y je

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

Obecněji, kartézský součin souboru X_i,, $i \in J$ je

$$\prod_{i \in J} X_i = \{(x_i)_{i \in J} \mid x_i \in X_i\}.$$

Pro konečné soubory píšeme

$$X \times Y \times Z, \quad X_1 \times \cdots \times X_n$$

a podobně.

1.5. Množinu všech podmnožin množiny X, t.j.

$$\{A \mid A \subseteq X\},$$

označujeme

$$\mathfrak{P}(X) \quad \text{nebo} \quad \exp X$$

(o jednotnost se nesnažíme, v literatuře se užívají různé symboly a není na škodu když si na to čtenář zvykne).

1.6. Naopak důsledně stejně budeme označovat některé často se opakující množiny:

$\mathbb{N}$ ... množinu přirozených čísel,

$\mathbb{Z}$ ... množinu celých čísel,

$\mathbb{R}$ ... množinu reálných čísel, přesto ale občas připomeneme o co jde.

1.7. Čtenář mé pravděpodobně za sebou nějaký kurs formální teorie množin. Zde se budeme (v zásadě) držet systému Gödel-Bernays-von Neumannova. Pokud ale kurs nebyl, není to žádné neštěstí. Čtenář jistě aspoň slyšel o paradoxech teorie množin (typu "množina všech množin" a podobně), kterým je potřeba se vyhnout. Dělá se to (v podstatě) rozlišováním mezi *množinami* (soustavami prvků, které samy mohou být prvky jiných korektně definovaných soustav) a *třídami* (soustavami, které jsou korektně definovány, ale prvky jiných už samy býti nemohou).

Někdy (ne příliš často, ale přece jen) bude v tomto textu rozlišování mezi množinami a třídami nutné.

2. Binární relace

2.1. *(Binární) relace* na množině X je libovolná podmnožina $R \subseteq X \times X$.

> **Poznámka.** Pokud je to z kontextu zřejmé, užívá se slovo *relace* bez přívlastku pro relace binární. Budeme to v dalším také dělat.

Často se píše

$$xRy \quad \text{místo} \quad (x, y) \in R$$

a označuje

$$xR = \{y \mid xRy\} \quad \text{a} \quad Ry = \{x \mid xRy\}.$$

Za zvláštní označení stojí *diagonální relace*, nebo *diagonála*,

$$\Delta = \Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

2.2. Relace se mezi sebou *skládají* podle pravidla

$$R \circ S = \{(x, z) \mid \exists y,\ xRy,\ ySz\}.$$

Jiná operace s relací je *inverse* relace R

$$R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}.$$

Následující velmi jednoduchá pravidla budeme užívat bez dalšího vysvětlování.

$$\begin{aligned}
&R_1 \subseteq R_2,\ S_1 \subseteq S_2 \quad \Rightarrow \quad R_1 \circ S_1 \subseteq R_2 \circ S_2 \quad \text{a} \quad R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1},\\
&(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T), \quad \Delta \circ R = R \circ \Delta = R,\\
&(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1}.
\end{aligned}$$

Speciálně si všimněte, že

$$\text{je-li } \Delta \subseteq R, \text{ je } R \subseteq R \circ R,$$

a že ale $R \subseteq R \circ R$ neplatí obecně.

2.3. Následující vlastnosti relací mají ustálená jména

$$\begin{array}{lll}
\Delta \subseteq R \ : & R \text{ je } \textit{reflexivní}, & \textit{reflexivita},\\
R = R^{-1} \ : & R \text{ je } \textit{symetrická}, & \textit{symetrie},\\
R \circ R \subseteq R \ : & R \text{ je } \textit{transitivní}, & \textit{transtivita},\\
R \subseteq R \circ R \ : & R \text{ je } \textit{interpolativní}, & \textit{interpolativita}.
\end{array}$$

Ustálené termíny se užívají též pro některé kombinace:
R je *ekvivalence* $\equiv$ R je reflexivní, symetrická a transitivní.
R je *předuspořádání* $\equiv$ R je reflexivní a transitivní.

2.4. Nejmenší reflexivní relace obsahující R je zřejmě

$$R \cup \Delta,$$

Nejmenší symetrická pak

$$R \cup R^{-1}$$

(všimněte si, že $R \cap R^{-1}$ je zase *největší* symetrická relace *obsažená* v R).

Dosáhnout transitivity je o trochu těžší, musí se vzít

$$R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \cdots (\overbrace{R \circ \cdots \circ R}^{n-\text{krát}}) \cup \cdots .$$

Jako jednoduché cvičení dokažte, že nejmenší *ekvivalence* obsahující R je

$$\Delta \cup \widetilde{R} \cup (\widetilde{R} \circ \widetilde{R}) \cup (\widetilde{R} \circ \widetilde{R} \circ \widetilde{R}) \cup \cdots (\overbrace{\widetilde{R} \circ \cdots \circ \widetilde{R}}^{n-\text{krát}}) \cup \cdots$$

kde $\widetilde{R} = R \cup R^{-1}$.

Nejmenší interpolativní relace obsahující danou obecně neexistuje, ale největší v dané obsažená ano. S tím se setkáme v V.5.5.

3. Zobrazení

3.1. Běžnou definici zobrazení, jak se obvykle zavádí v základech teorie množin, budeme muset trochu modifikovat. Obvykle se postupuje takto:

(Z) Rozšíříme pojem relace na podmnožiny $R \subseteq X \times Y$ kartézského součinu v němž množiny X a Y mohou být různé, a zobrazení z X do Y je pak taková relace $R \subseteq X \times Y$, že ke každému $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ takové, že $(x, y) \in R$.

Máme problém s tím, že z takové relace nemůžeme rekonstruovat obor hodnot Y. Na jeho stanovení ale záleží.

Budeme tedy *zobrazení* $f : X \to Y$ chápat raději jako následující soustavu dat

- definiční obor X,
- obor hodnot Y,
- a jakoukoli specifkaci f přiřazující ke každému prvku $x \in X$ právě jeden prvek z Y (ten potom obvykle označujeme $f(x)$); ta může být representováno třeba relací ze (Z) nahoře, ale také se můžeme na f dívat jako na symbol zastupující předpis, někdy třeba explicite daný, někdy aspoň formálně předpokládaný.

Nyní jistě namítnete, že definiční obor je relací R v (Z) určen. To je v tomto okamžiku pravda, ale ponecháváme si otevřená vrátka pro pozdější úvahy, kdy definiční obor a obor hodnot budou obsahovat další informaci (mluvíme-li třeba o spojitém zobrazení: relace $f \subseteq X \times Y$, sama o sobě takovou vlastnost jako spojitost nemá, ani když specifikujeme množinu Y, teprve ve vztahu k strukturám na X a Y tento pojem získává smysl).

Množinu všech zobrazení z X do Y budeme označovat

$$Y^X.$$

3.2. Máme-li explicitní formuli $\mathcal{F}$ pro nějaké zobrazení, vyznaujeme to někdy symbolem $x \mapsto \mathcal{F}(x)$, jako např. v $f = (x \mapsto x^2 + x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro reálnou funkci určenou vyznačeným polynomem, nebo v $(x \mapsto \{x\}) : X \to \mathfrak{P}(X)$.

3.3. Skládání zobrazení. Relace $R \subseteq X \times Y$ a $S \subseteq Y \times X$ je možno skládat stejně jako v 2.2, totiž podle formule

$$R \circ S = \{(x, z) \mid \exists y,\ xRy,\ ySz\}.$$

Tak můžeme skládat i zobrazení $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$.

Jenomže : Je zvykem psát skládání zobrazení obráceně, t.j. jako

$$gf \quad \text{nebo} \quad g \cdot f \quad \text{místo} \quad f \circ g.$$

To vychází z dosazování hodnot

$$(gf)(x) = g(f(x)). \tag{$*$}$$

Možná to trochu mate, ale snahy změnit tento způsob psaní se zatím neujaly (i když se pokusy objevují znovu a znovu). Možná proto, že "správné" pořadí v konfrontaci s $(*)$ mate ještě víc.

Identické zobrazení $(x \mapsto x) : X \to X$ se obvykle označuje

$$\mathrm{id}_X \quad \text{nebom též} \quad 1_X.$$

Zřejmě platí formule

$$f(gh) = (fg)h \quad \text{a pro } f : X \to Y \quad \mathrm{id}_Y \cdot f = f \cdot \mathrm{id}_X = f.$$

Je-li $X \subseteq Y$, díváme se na vložení X do Y často jako na zobrazení $j = (x \mapsto x) : X \to Y$. Mluvíme pak o *zobrazení vložení* a často píšeme $j : X \subseteq Y$.

3.4. Řekneme, že f je zobrazení *prosté* jestliže

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(y)$$

a že je to zobrazení *na* jestliže

$$\forall y \in Y\ \exists x \in X, \quad y = f(x).$$

Řekneme, že f je *vzájemně jednoznačné* je-li prosté i na. V posledním případě máme jednoznačně definované *inversní* zobrazení $g : Y \to X$ ($g(y) = x$ právě když $y = f(x)$) charakterisované rovnostmi

$$fg = \mathrm{id}_Y, \quad gf = \mathrm{id}_X.$$

Pokud inversní zobrazení k zobrazení f existuje, označuje se obvykle

$$f^{-1}.$$

Pozorování. *f je prosté právě když je jím v operaci skládání možno krátit zleva, t.j., právě když*

$$fg = fh \quad \Rightarrow \quad g = h.$$

f je zobrazení na právě když je jím v operaci skládání možno krátit zprava, t.j., právě když

$$gf = hf \quad \Rightarrow \quad g = h.$$

(Že je takovými zobrazeními možno krátit tak, jak je řečeno je zřejmé. Nechť naopak f není prosté a nechť $f(a) = f(b)$ a $a \neq b$. Definujme zobrazení $g, h : \{0\} \to X$ předpisy $g(0) = a, h(0) = b$. Potom $fg = fh$ třebaže $g \neq h$.

Nechť f není na. Definujme $g, h : Y \to \{0, 1\}$ předpisy $g(x) = 0$ pro všechna y, a $h(y) = 0$ kdykoli $y = f(x)$ pro nějaké x, $h(y) = 1$ jinak. Potom $gf = hf$ a $g \neq h$.)

Poznámky. 1. Vidíte, že z hlediska operace skládání jsou zobrazení prostá a zobrazení na jakési protějšky. Při klasické definici zobrazení bychom s tím měli problémy: otázka, zda je zobrazení *prosté* nebo ne je tam významná; otázka, zda zobrazení je *na* nedává smysl.

2. Jsem si vědom toho, že používání slova “na” jako adjektiva je v češtině nehezké (ostatně ani v angličtině obdobné používání slova “onto” není nic moc). Ale žádná rozumná alternativa zatím nabídnuta nebyla (kdybychom se rozhodli pro “surjektivní”, asi bychom potom měli užívat “injektivní” místo “prosté”, a to je přetížený termín – a navíc by byla škoda neužívat zažitého a pěkného českého termínu).

3. Jako jsou zobrazení vložení jakýmisi “nejzákladnějšími prostými zobrazeními”, můžeme za “nejzákladnější zobrazení na” považovat faktorisace (kvocienty) podle ekvivalencí E, totiž zobrazení $q : (x \mapsto xE) : X \to X/E$, kde X/E jen t.zv. množina tříd ekvivalence (jak si čtenář jistě vzpomíná z prvního ročníku, ekvivalence na X jsou v přirozeném vzájemně jednoznačném vztahu s disjunktními rozklady $X = \bigcup\{X_i \mid i \in J\}$ a zobrazení q je zobrazení $X \to \bigcup\{X_i \mid i \in J\}$ přiřazující prvku $x \in X$ tu podmnožinu x_i, do které náleží).

3.5. Je-li $f : X \to Y$ zobrazení a jsou-li $A \subseteq B$ resp. $B \subseteq Y$ podmnožiny, píšeme

$$\begin{aligned} f[A] &= \{f(a) \mid a \in A\} && (\textit{obraz} \text{ podmnožiny } A), \\ f^{-1}[B] &= \{a \mid f(a) \in B\} && (\textit{vzor} \text{ podmnožiny } B). \end{aligned}$$

(Často se píše prostě $f(A)$, $f^{-1}(B)$, a málokdy to vede k nejasnostem. Ale přece jen, někdy může být x zároveň prvkem i podmnožinou X – viz třeba ordinály v následující podkapitole. Proto raději volíme opatrnější označení.)

Zřejmě platí

$$f^{-1}[f[A]] \supseteq A, \quad f[f^{-1}[B]] \subseteq B.$$

To souvisí s mnohem obecnější zákonitostí – viz II.5.

Jako jednoduché cvičení si čtenář může dokázat, že

$$\begin{aligned} f^{-1}[f[A]] = A \ \text{ pro každé } \ A \subseteq X \ \text{ právě když } \ f \ \text{ je prosté}, \\ f[f^{-1}[B]] = B \ \text{ pro každé } \ B \subseteq Y \ \text{ právě když } \ f \ \text{ je na}. \end{aligned}$$

3.6. Více o kartézském součinu. O zobrazeních $p_j = ((x_i)_{i \in J} \mapsto x_j) : \prod_{i \in J} X_i \to X_j$ se obvykle mluví jako o *projekcích.* Všimněme si následující vlastnosti soustavy projekcí.

3.6.1. Tvrzení. *Pro každou soustavu zobrazení $f_i : Y \to X_j$, $i \in J$, existuje právě jedno zobrazení $f : Y \to \prod_{i \in J} X_i$ takové, že*

$$\forall i \quad p_i \cdot f = f_i. \tag{$*$}$$

Důkaz. Takové zobrazení je nejvýš jedno: je-li $f(y) = (x_i)_{i \in J}$ je podle $(*)$ $x_i = f_i(y)$. Tedy musí být f dáno předpisem

$$f(y) = (f_i(y))_{i \in J}.$$

Na druhé straně tento předpis zřejmě dává zobrazení, které splňuje soustavu rovnic $(*)$. $\square$

Je to velmi jednoduché, ale také dost významné pozorování: dává možnost charakterisovat kartézský součin jen prostředky algebry skládání zobrazení. Ukažme si ještě, že je tak součin opravdu charakterisován jednoznačně.

3.6.2. Tvrzení. *Buď $q_i : X \to X_i$ soustava zobrazení taková, že pro každou soustavu zobrazení $f_i : Y \to X_j$, $i \in J$, existuje právě jedno zobrazení $f : Y \to Y$ takové, že*

$$\forall i \quad q_i \cdot f = f_i. \tag{$**$}$$

Potom existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $q : X \to \prod_{i\in J} X_i$ takové, že $p_i \cdot q = q_i$.

(Jinými slovy, při jednoznačné řešitelnosti soustav rovnic $(**)$ *je* X spolu s projekcemi q_i kartézský součin, máme jen (překladem q) případně jinak zakodovány J-tice.)

Důkaz. Podle 3.6.1 máme zobrazení $q : X \to \prod_{i\in J} X_i$ takové, že $p_i \cdot q = q_i$, podle předpokladu existuje $p : \prod_{i\in J} X_i \to X$ takové, že $q_i \cdot p = p_i$. Tedy je

$$p_i(qp) = p_i \quad \text{a} \quad q_i(pq) = q_i.$$

Z jednoznačnosti řešení soustav $(*)$ a $(**)$ a z toho, že identická zobrazení jsou řešeními, dostáváme $qp = \mathrm{id}$ a $pq = \mathrm{id}$. $\square$

4. Ordinální čísla, kardinální čísla, axiom výběru

V tomto oddíle připomeneme několik fakt z teorie množin. Podrobnosti se snadno najdou v běžných učebnicích.

4.1. Srovnávání velikosti množin. Řekneme, že množina X *má mohutnost nejvýše takovou* jako množina Y a píšeme

$$X \preccurlyeq Y$$

existuje-li prosté zobrazení $f : X \to Y$. Řekneme, že množiny X a Y *mají stejnou mohutnost* a píšeme

$$X \approx Y$$

existuje-li vzájemně jednoznačné zobrazení X na Y.

> (Všimněte si, že neříkáme *kolik* ta mohutnost je; zatím jen dvě množiny podle velikosti srovnáváme. Ale později, v 4.5, mohutnosti dáme smysl jakéhosi čísla.)

Zřejmě platí implikace

$$X \approx Y \quad \Rightarrow \quad X \preccurlyeq Y \quad \text{i} \quad Y \preccurlyeq X.$$

Zajímavější je, že platí též

$$X \preccurlyeq Y \quad \text{a} \quad Y \preccurlyeq X \quad \Rightarrow \quad X \approx Y.$$

To je slavná Cantor-Bernsteinova věta (její důkaz předvedeme v II.7.4 jako aplikaci jisté věty o pevném bodě).

4.2. Dobré uspořádání. Uspořádáními se budeme podrobněji zabývat v další kapitole. Zde půjde jen o velmi speciální, ale také velmi důležitý případ.

Řekneme, že relace $\leq$ na množině X je *dobré uspořádání* (nebo, že je tou relací množina X *dobře uspořádána*) jestliže

- $\leq$ je symetrická a transitivní,
- pro každé dva různé prvky x, y platí právě jedna z možností $x \leq y$, $y \leq x$,
- a každá neprázdná podmnožina $M \subseteq X$ má v $\leq$ nejmenší prvek.

(Například množina $\mathbb{N}$ přirozených čísel je dobře uspořádána ve standardním uspořádání podle velikosti – což je ekvivalentní s principem indukce.)

4.3. Axiom výběru. Tento princip je možno snadno formulovat takto:

(AC) *Ke každému zobrazení f množiny X* na *množinu Y existuje zobrazení $g : Y \to X$ takové, že $fg = \mathrm{id}_Y$.*

Platí

4.3.1. Věta. (Zermelova věta.) *Z axiomu výběru plyne, že každou množinu lze dobře uspořádat.*

Poznámka. Větu lze obrátit. Tedy je axiom výběru ekvivalentní s "Principem Dobrého Uspořádání":

Každou množinu lze dobře uspořádat.

(Viz k tomu dále 4.5.1.)

4.4. Řekneme, že množina nebo třída X je *transitivní* jestliže platí implikace

$$x \in X \quad \Rightarrow \quad x \subseteq X.$$

Příklad. Běžná konstrukce přirozených čísel "z ničeho", totiž

$$0 = \emptyset,\ 1 = \{0\},\ 2 = \{0, \{0\}\}, \dots, n + 1 = \{0, 1, \dots, n\}$$

representuje $\mathbb{N}$ jako transitivní množinu.

Ordinální číslo (též *ordinál*) je transitivní množina taková, že je na ní relace $\underline{\in}$ ("$\in$ nebo $=$") dobré uspořádání.

Třídu všech ordinálních čísel označíme

$$\mathsf{Ord}.$$

4.4.1. Věta. *1.* Ord *je transitivní třída, a je to vlastní třída (t.j., není to množina).*

2. Ord *je jediná vlastní třída dobře uspořádaná relací* $\underline{\in}$.

3. Pro každou dobře uspořádanou množinu $(X, \leq)$ *existuje isomorfní ordinál* $\alpha \in \mathsf{Ord}$ *(t.j., takový, že existuje vzájemně jednoznačné zobrazení* $f : X \to \alpha$ *pro které je* $x \leq y$ *právě když* $f(x) \underline{\in} f(y)$*).*

4.4.2. Důsledek. *Z axiomu výběru plyne, že prvky každé množiny je možno pro vhodný ordinál* α *seřadit (bez opakování) do transfinitní posloupnosti*

$$(x_\beta)_{\beta<\alpha}.$$

($\beta < \alpha$ píšeme místo $\beta \in \alpha$; toto názorné značení se běžně užívá, a my to také budeme dělat.)

4.5. Kardinální čísla, mohutnosti. *Kardinální číslo* (též *kardinál*) je ordinální číslo α které nemá stejnou mohutnost se žádným ordinálním číslem $\beta < \alpha$.

Tedy,

žádné dva kardinály nemají stejnou mohutnost.

Třídu všech kardinálních čísel označíme

$$\mathsf{Card}.$$

Z 4.3.1 dostáváme

4.5.1. Důsledek. *Z axiomu výběru plyne, že*
(1) ke každé množině existuje právě jedno kardinální číslo κ *takové, že* $X \approx \kappa$*, a že*
(2) prvky každé množiny je možno pro vhodný kardinál κ *seřadit (bez opakování) do transfinitní posloupnosti*

$$(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}.$$

To jediné kardinální číslo κ pro které $X \approx \kappa$ nazýváme *mohutností*, nebo též *kardinalitou* množiny X a označujeme

$$|X|.$$

Zde jsou dvě pravidla pro práci s mohutnostmi:

4.5.2. *Je-li* J *konečná množina a je-li aspoň jedna z mohutností* $|X_i|$ *nekonečná, je*

$$|\bigcup_{i\in J} X_i| = \max_{i\in J} |X_i|.$$

Obecněji, je-li aspoň jedna z mohutností $|X_i|$ *nekonečná a je-li* $|J| \leq \sup |X_i|$*, je*

$$|\bigcup_{i\in J} X_i| = \sup_{i\in J} |X_i|.$$

Pro kartézský součin (opět, je-li aspoň jedna z množin X_i *nekonečná) platí*

$$|X_1 \times \cdots \times X_n| = \max_{i=1,\dots,n} |X_i|.$$

(Co je supremum čtenář asi ví a pokud ne, stejně pravidlo nebude potřebovat dříve, než se to dozví v příští kapitole.)

Pokud čtenář očekával nějaké zajímavé pravidlo pro součin nekonečně mnoha množin, bude zklamán. Ostatními standardními axiomy teorie množin není určena ani spočetná mocnina dvoubodové množiny, jak ukázalo negativní řešení slavné hypotézy kontinua.)

4.6. Zornovo lemma a Princip Maximality. Následující dvě tvrzení, ekvivalentní s axiomem výběru, jsou velmi často užívány. V prvním případě opět trochu předbíháme s pojmy; budou vysvětleny v následující kapitole. Obvykle ale užíváme druhou variantu a u té vystačíme s tím, co už máme.

4.6.1. Zornovo Lemma. *Buď $(X, \leq)$ částečně uspořádaná množina taková, že v ní pro každou podmnožinu, která je relací $\leq$ uspořádána lineárně existuje horní mez. Potom ke každému prvku $x \in X$ existuje maximální $y \in X$ takový, že $x \leq y$.*

Před druhou variantou zaveďme následující pojem. Řekneme, že množina $\mathcal{C}$ podmnožin množiny X je *řetěz*, jestliže pro každé dvě $A, B \in \mathcal{C}$ je buď $A \subseteq B$ nebo $B \subseteq A$. Následující tvrzení z Zornova lemmatu okamžitě plyne a je s ním (a tedy i s axiomem výběru) ekvivalentní.

4.6.2. Princip Maximality. *Buď $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ taková, že pro každý řetěz $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ existuje $A \in \mathcal{A}$ taková, že $\bigcup \mathcal{C} \subseteq A$. Potom pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$ existuje B maximální (vzhledem k inklusi) v $\mathcal{A}$ taková, že $A \subseteq B$.*

Poznamenejme ještě, že při odkazech na princip maximality se často také mluví o Zornově lemmatu.

5. Relační systémy, homomorfismy

V tomto oddíle začneme diskutovat relační systémy. Jsou to struktury velmi významné. I v (skoro) nejjednodušším případě, systému sestávajícím z jediné binární relace, dostáváme (orientované) grafy; čtenář jistě ví, jak bohaté teorie jsou s nimi spojeny.

5.1. Buď M nějaká množina. *M-ární relací* na množině X rozumíme libovolnou podmnožinu

$$R \subseteq X^M.$$

V případě malých konečných množin M (obvykle representovaných jako přirozená čísla n) bereme obvykle

$$\overbrace{X \times \cdots \times X}^{n \text{ krát}} \quad \text{místo} \quad X^n$$

a třebaže $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ neváháme indexovat n-tice jako $(x_1, \ldots, x_n)$ místo správnějšího – ale méně pohodlného – $(x_0, \ldots, x_{n-1})$.

V případech $n = 1, 2, 3$ se obvykle mluví o *unárních* resp. *binárních* resp. *ternárních* relacích

$$R \subseteq X \quad \text{resp.} \quad R \subseteq X \times X \quad \text{resp.} \quad R \subseteq X \times X \times X.$$

5.2. Homomorfismy a isomorfismy. Buďte R, S M-ární relace na množinách X, Y. Zobrazení $f : X \to Y$ nazýváme *homomorfismem* vzhledem k R, S (a často píšeme $f : (X, R) \to (Y, S)$) platí-li

$$\forall \xi \in R, \quad f \cdot \xi \in S.$$

($\xi \in R$ je ovšem zobrazení z M do X. V případech unárních, binárních, ternárních – a podobně dalších n-árních relací dostáváme průhlednější podoby

$f[R] \subseteq S,$
$(f \times f)[R] \subseteq S,$ t.j. $(x, y) \in R \Rightarrow (f(x), f(y)) \in S,$ nebo $xRy \Rightarrow f(x)Sf(y),$
$(f \times f \times f)[R] \subseteq S,$ t.j. $(x, y, z) \in R \;\Rightarrow\; (f(x), f(y), f(z)) \in S.$)

Zobrazení $f : (X, R) \to (Y, S)$ je *isomorfismus*, je-li vzájemně jednoznačné a platí-li, že

$$\forall \xi : M \to X, \quad f \cdot \xi \in S \quad \text{právě když} \quad f \in R.$$

Uvědomte si, že tím požadujeme totéž jako ve formulaci

> *$f : (X, R) \to (Y, S)$ je homomorfismus a existuje k němu homomorfismus $g : (Y, S) \to (X, S)$ takový, že $fg = \mathrm{id}_Y$ a $gf = \mathrm{id}_X$.*

5.3. *Typem* rozumíme soubor $\Delta = (\Delta_t)_{t \in T}$. Řekneme, že je *konečný*, jsou-li T a všechny Δ_t konečné množiny, a že je *finitární*, jsou-li Δ_t konečné (o T při tom nepředpokládáme nic). Ve finitárním případě zpravidle representujeme arity Δ_t přirozenými čísly, a na X^{n_t} se díváme jako na $\overbrace{X \times \cdots \times X}^{n_t \text{ krát}}$ (stejně jako v 5.1).

Relační struktura typu $\Delta = (\Delta_t)_{t \in T}$ na možině X je soubor $R = (R_t)_t \in T$ kde R_t jsou Δ_t-ární operace na X. O dvojici (X, R) pak mluvíme jako o *relačním objektu typu* Δ a není-li nebezpečí nedorozumění prostě jako o *objektu.* Množina X se pak obvykle nazývá *nosná množina* tohoto objektu.

Jsou-li $(X,R),(Y,S)$ (relační) objekty (typu Δ), řekneme, že zobrazení $f : X \to Y$ je *homomorfismus* je-li to homomorfismus vzhledem k R_t, S_t pro všechna $t \in T$.

(Přesněji, homomorfismus není jen to zobrazení $f : X \to Y$ – o tom mluvíme jako o *nosném zobrazení* daného homomorfismu –; je to ono zobrazení *plus* informace o strukturách definičního oboru a oboru hodnot.)

Píšeme pak

$$f : (X,R) \to (Y,S).$$

V případě, že $(X,R) = (Y,S)$ mluvíme o *endomorfismu.*

Třídu všech objektů a homomorfismů mezi nimi budeme označovat

$$\mathsf{Rel}(\Delta).$$

5.4. $f : (X,R) \to (Y,S)$ se nazývá *isomorfismus* je-li to isomorfismus vzhledem k R_t, S_t pro všechna $t \in T$. Zřejmě,

> *$f : (X,R) \to (Y,S)$ je isomorfismus právě když existuje homomorfismus $g : (Y,S) \to (X,R)$ takový, že $gf = \mathrm{id}_{(X,R)}$ a $fg = \mathrm{id}_{(Y,S)}$.*

Je-li při tom $(X,R) = (Y,S)$ mluvíme o *automorfismu.*

Poznámka. Možná, že teď, když jsme se seznámili s dost bohatou zásobou struktur na množině, je na místě poznámka o důležitosti isomorfismů. V běžné praxi nás obvykle zajímá, spíš než objekt (X,R) sám, jeho isomorfismový typ, t.j., "(X,R) až na isomorfismus": representujeme-li třeba nějaký objekt v počítači, vůbec nás nezajímá, kde jsou uloženy prvky, a pokud by si je počítač nějak přerovnal, nic nenamítáme. Na čem ale trváme je aby byly zachovány vztahy mezi nimi. Ale nejde o uložení v počítači; obecně, když v nějakém matematickém systému pracujeme (třeba v aritmetice), na zakodování prvků nám záleží spíš z hlediska co je pohodlnější, a zakodování ochotně podle toho měníme; početní pravidla tím však nesmí být zasažena.

6. Podobjekty, součiny a kvocienty relačních systémů

6.1. Podobjekty. Buď $(X, R = (R_t)_{t\in T})$ objekt z $\mathsf{Rel}(\Delta)$, buď $Y \subseteq X$ a $j : Y \to X$ zobrazení vložení. Na množině Y definujm relační systém téhož typu

$$R|Y = (R_{Y,t})_{t\in T},\ \text{kde}$$
$$R_{Y,t} = \{\xi : \Delta_t \to Y\ |j\xi \in R_t\}.$$

Díváme-li se na $\xi : \Delta_t \to X, Y$ jako na soubory prvků, dostáváme (ve finitárním případě určitě a obecně asi také) průhlednější popis

$$R_{Y,t} = \{(x_t)_{t\in T}\ |x_t \in Y,\ (x_t)_{t\in T} \in R_t\}$$
$$R_{Y,t} = \{(x_1, \dots, x_n)\ |(x_1, \dots, x_n) \in R_t \cap (Y \times \cdots \times Y)\}.$$

Řekneme pak, že objekt $(Y, R|Y)$ je *podobjekt* objektu (X, R) nesený podmnožinou Y.

6.1.1. Pozorování. *Zobrazení vložení $j : (Y, R|Y) \subseteq (X, R)$ je homomorfismus.*

6.2. Tvrzení. *Buď $(Y, R|Y)$ podobjekt objektu (X, R) a buď $f : (Z, S) \to (X, R)$ homorfismus takový, že $f[Z] \subseteq Y$. Potom zobrazení $f' : Z \to Y$ definované předpisem $f'(z) = f(z)$ je homomorfismus.*

Důkaz. Pro vložení $j : Y \subseteq X$ je $f = jf'$. Je-li $\xi \in S_t(\subseteq Z^{\Delta_t})$ máme $jf'\xi = f\xi \in R_t$ a tedy $f\xi \in R_{Yt}$. $\square$

6.2.1. Poznámky. 1. Z 6.1.1 a 6.2 vidíme, že z homomorfismu $f : (X, R) \to (Y, S)$ dostáváme homomorfismy $f' : (X', R|X') \to (Y', S|Y')$ pro libovolné podmnožiny $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$ takové, že $f[X'] \subseteq Y'$.

2. Na $Y \subseteq X$ zvolme libovolný relační systém R' daného typu takový, že $j : Y \to X$ je homomorfismus. Potom ve značení z 6.2 je $j' = \mathrm{id}_Y$ a máme $\xi \in R'_t \Rightarrow \xi = \mathrm{id} \cdot \xi \in R_{Yt}$. Tedy je $R|Y$ největší relační struktura daného typu na Y taková, že j je homomorfismus.

3. Speciálně v případě již zmiňovaných orientovaných grafů (totiž ve třídě $\mathsf{Rel}((2))$) jsou $(Y, R|Y)$ indukované podgrafy grafů (X, R).

6.3. Součiny (produkty). Buď (X_i, R_i), $i \in J$, soubor objektů z $\mathsf{Rel}((\Delta_t)_{t\in T})$. Na kartézském součinu $X = \prod_{i\in J} X_i$ (s projekcemi $p_j : \prod_i X_i \to X_j$) definujme relační systém R typu $(\Delta_t)_{t\in T}$ předpisem

$$(\xi : \Delta_t \to X) \in R_t \quad \text{právě když} \quad \forall i \in J,\ p_i\xi \in R_{it}.$$

Takto získaný objekt (X, R) nazýváme *součinem* nebo *produktem* souboru (X_i, R_i), $i \in J$ a označujeme

$$\prod_{i\in J}(X_i, R_i).$$

Pro malé konečné soubory píšeme

$$(X,R)\times(Y,S),\quad (X_1,R_1)\times(X_2,R_2)\times(X_3,R_3)$$

a podobně.

(Třeba v součinu $(X_1,R_1)\times(X_2,R_2)$ máme

$$(x_1,x_2)R(y_1,y_2)\quad\text{právě když}\quad x_1Ry_1 \text{ a } x_2R_2y_2.\ )$$

O součinu souboru stejných objektů, t.j. $\prod_{i\in J}(X_i,R_i)$ kde $(X_i,R_i)=(X,R)$ pro všechna i, se běžně mluví jako o *mocnině*, a také se takový součin obvykle jako mocnina, tedy

$$(X,R)^J,$$

označuje.

6.3.1. Pozorování. 1. Všechny projekce jsou homomorfismy.

2. R je největší takový systém, že všechny projekce jsou (ještě) homomorfismy.

6.3.2. Tvrzení. *Buď (X_i,R_i), $i\in J$, soubor relačních objektů typu $\Delta=(\Delta_t)_{t\in T}$. Buď $f_i:(Y,S)\to(X_i,R_i)$, $i\in J$, soubor homomorfismů. Potom existuje právě jeden homomorfismus $f:(Y,S)\to\prod_i(X_i,R_i)$ takový, že pro všechna $i\in J$ je $p_if=f_i$.*

Důkaz. Podle 3.6.2 existuje právě jedno takové zobrazení f. Jde tedy jen o to dokázat, že f je homomorfismus. Buď $\xi\in S_t$. Potom, jelikož všechna f_i jsou homomorfismy, musí pro všechna $i\in J$ být $f_i\xi\in R_i$, t.j., $p_i(f\xi)\in R_i$; tedy je $f\xi\in R$. $\square$

6.4. Buď (X,R) objekt z $\mathsf{Rel}(\Delta)$, $\Delta=(\Delta_t)_{t\in T}$, a $q:X\to Y$ zobrazení *na*. Na množině Y definujme relační systém $\overline{R}$ typu Δ předpisem

$$\overline{R}_t=\{q\xi\ |\xi\in R_t\}.$$

Okamžitě vidíme, že

> $\overline{R}$ *je nejmenší relační struktura daného typu taková, že $q:(X,R)\to(Y,S)$ je homomorfismus.*

O objektu $(Y, \overline{R})$ se často hovoří jako *kvocientu*, nebo *faktorovém objektu* objektu (X, R) (podle q, nebo podle ekvivalence $E = \{(x, y) \,|q(x) = q(y)\})$.

6.4.1. Tvrzení. *Buď $f : (X, R) \to (Z, S)$ homomorfismus takový, že*

$$q(x) = q(y) \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(y). \tag{$*$}$$

Potom existuje právě jeden homomorfismus $\overline{f} : (Y, \overline{R}) \to (Z, S)$ takový, že $\overline{f} \cdot q = f$.

Důkaz. Podmínka $(*)$ říká přesně to, že existuje *zobrazení* $\overline{f}$ takové, že $\overline{f}q = f$. Jde tedy jen o to, dokázat, že $\overline{f}$ je homomorfismus. Ale to je zřejmé: je-li $\eta \in \overline{R}_t$, je $\eta = q\xi$ pro nějaké $\xi \in R_t$ a tedy $\overline{\eta} = \overline{f}q\eta = f\xi \in S_t$. $\square$

.

7. Projektivní a injektivní vytváření struktur

7.1. Čtenář si jistě všiml společných rysů součinů a podobjektů. Obecněji, mějme dány objekty (X_i, R_i), $i \in J$, typu $\Delta = (\Delta_t)_{t \in T}$, a soustavu zobrazení $r_i : X \to X_i$ takovou, že

$$(\forall i \in J,\ r_i f = r_i g) \quad \Rightarrow \quad f = g$$

(u součinů to byly projekce $p_i : \prod_{j \in J} X_j \to X_i$, u podobjektů jen jeden objekt (X, R) a jedno zobrazení $j : Y \subseteq X$). Potom máme triviální

Pozorování. *Relační systém $R' = (R'_t)_{t \in T}$ kde*

$$R'_t = \{\xi : \Delta_t \to X \ |\forall i \in J,\ r_i \xi \in R_{it}\}$$

je největší relační systém daného typu na X takový, že všechna xobrazení r_i jsou homomorfismy $(X, R) \to (X_i, R_i)$.

7.1.1. Věta. *Pro relační systém R' z 7.1 platí:*

(Proj) *Je-li $(Y, S) \in \mathsf{Rel}(\Delta)$ a je-li $f : Y \to X$ zobrazení takové, že všechna $f_i = r_i f$ jsou homomorfismy $(Y, S) \to (X_i.R_i)$ pak f je homomorfismus $(Y, S) \to (X, R')$.*

Relační systém R' je tvrzením (Proj) *jednoznačně určen.*

Důkaz. I. Buď $\xi \in S_t$, t libovolné. Potom $f_i\xi = (r_i f)\xi = r_i(f\xi)$ je v R_{it} a tedy $f\xi \in R'_t$.

II. Má-li systém R'' stejnou vlastnost, jsou identická zobrazení $(X, R'') \to (X, R')$ i $(X, R') \to (X, R'')$ homomorfismy, a tedy $R'_t \subseteq R''_t$ a $R''_t \subseteq R_t$. $\square$

7.2. Podobně jsou-li objekty (X_i, R_i), $i \in J$, a soustava zobrazení $s_i : X_i \to X$ takové, že

$$(\forall i \in J,\ fs_i = gs_i) \quad \Rightarrow \quad f = g$$

máme triviální

Pozorování. *Relační systém $R' = (R'_t)_{t \in T}$ kde*

$$R'_t = \{s_i\xi \mid \xi \in R_{it},\ i \in J\}$$

je nejmenší relační systém na X takový, že všechna xobrazení s_i jsou homomorfismy $(X_i, R_i) \to (X, R)$.

7.2.1. Věta. *Pro relační systém R' z 7.2 platí:*

(Inj) *Je-li $(Y, S) \in \mathsf{Rel}(\Delta)$ a je-li $f : X \to Y$ zobrazení takové, že všechna $f_i = fs_i$ jsou homomorfismy $(X_i.R_i) \to (Y, S)$ pak f je homomorfismus $(X, R') \to (Y, S)$.*

Relační systém R' je tvrzením (Inj) *jednoznačně určen.*

Důkaz můžeme ponechat čtenáři jako jednoduché cvičení.

7.3. O konstrukci z bodu 7.1 se obvykle mluví jako o *projektivním* vytváření struktury, o konstrukci z bodu 7.1 jako o *injektivním* vytváření.

Setkali jsme se zatím je s jedním příkladem injektivního vytváření, totiž s kvocientem v bodě 6.4. Jiný příklad, zdánlivě nezajímavý a přesto velmi důležitý, je *suma* soustavy objektů.

Mějme dány objekty (X_i, R_i), $i \in J$, a pro jednoduchost předpokládejme, že množiny X_i jsou disjunktní. Označme $X = \bigcup X_i$ a $j_i : X_i \subseteq X$ zobrazení vložení. Potom injektivní konstrukce dává na X relační systém

$$R = (R_t = \bigcup_{i \in J}\{j_i\xi \mid \xi \in R_{it}\})_{t \in T}$$

a pro získaný objekt platí, že

- všechna zobrazení $j_i : (X_i, R_i) \to (X, R)$ jsou homomorfismy,
- a pro každý systém homomorfismů $f_i : (X_i, R_i) \to (Y, S)$ existuje právě jeden homomorfismus $f : (X, R) \to (Y, S)$ takový, že pro všechna $i \in J$ platí $fj_i = f_i$ (nesený zobrazením f definovaným předpisem $f(x) = f_i(x)$ pro $x \in X_i$).

Všimněte si, že suma je jakýmsi zrcadlovým protějškem produktu (srovnejte s 6.3).

7.4. Poznámky. 1. Projektivní a injektivní vytváření se neomezuje na obecné relační struktury. Jsou to konstrukční paradigmata velmi běžná u řady běžných struktur, i když nemusí být dána tak jednoduchými formulemi jako zde.

Podstatné jsou charaktristiky z tvrzení 7.1.1 a 7.2.1; to, že jsme zde dostali projektivně vytvořenou strukturu jako největší s danou vlastností, a injektivně vytvořenou zase jako nejmenší, je specifická vlastnost relačních systémů (třeba u topologií jsou projektivně konstruované nejmenší a injektivně získané největší).

2. Možná je na místě vysvětlení, proč jsme sumy odbyli v poznámce a proč také v dalším budeme tento jev zanedbávat. U struktur z běžného matematického života je to buď konstrukce velmi jednoduchá (prostě položení objektů vedle sebe, podobné jako zde je to třeba u obecných prostorů) nebo naopak konstrukce dost složitá (typicky u algeber, nebo i u speciálních prostorů). Jednoduchý společný množinový podklad zde není. Více k tomu bude řečeno v (zatím teprve připravované) kapitole o kategoriích.

Kapitola II

(Částečná) uspořádání

1. Předuspořádání a uspořádání

1.1. *Předuspořádání* na množině M je relace $R \subseteq X \times X$ která je

- reflexivní, t.j., pro všechna $x \in X$ platí xRx,
- a transitivní, t.j., xRy a yRz implikuje xRz.

Platí-li navíc

$$xRy \text{ a } yRx \quad \Rightarrow \quad x = y, \tag{antisym}$$

mluvíme o *uspořádání* nebo o *částečném uspořádání*, to druhé chceme-li zdůraznit, že nepožadujeme aby nutně vždy platilo, že

$$\text{pro všechna } x, y \text{ buď } xRy \text{ nebo } yRx. \tag{lin}$$

Jestliže ale je požadavek (lin) splněn, řekneme, že uspořádání R je *lineární*; též se užívá termínu *řetěz*.

O objektu (X, R) s takovou relací mluvíme jako o *předuspořádané* (*uspořádané*, atd.) množině.

1.2. Z předuspořádáné množiny (X, R) snadno dostaneme uspořádanou tím, že zavedeme ekvivalenci

$$x \sim y \quad \equiv \quad xRy \;\&\; yRx$$

a uvažujeme místo X množinu tříd ekvivalence $X/\sim$. Na té se pak daná relace jeví jako uspořádání. Pokud na rozdílu mezi takto ekvivalentními prvky příliš nezáleží (což je častý případ), zjednodušíme si tím situaci. V dalším budeme zpravidla pracovat s uspořádáními.

1.3. (a) Nespecifikované uspořádání budeme obvykle označovat $\leq$; samozřejmě v konkretních případech užíváme značky podle potřeby (třeba $\preceq$, $\sqsubseteq$ a pod., viz ostatně příklady v dalším paragrafu).

(b) Buď $(X, \leq)$ (před)uspořádaná množina. Pro prvky $x \in X$ a podmnožiny $M \subseteq X$ budeme psát

$$\downarrow x = \{y \mid y \leq x\},\ \uparrow x = \{y \mid y \geq x\},\ \downarrow M = \bigcup_{x \in M} \downarrow x \text{ a } \uparrow M = \bigcup_{x \in M} \uparrow x.$$

1.4. Příklady. (a) Běžná uspořádání přirozených, celých, racionálních či reálných čísel jsou příklady lineárních uspořádání.

(b) Dělitelnost celých čísel (relace $a|b$, "a dělí b") je předuspořádání.

(c) Inkluse je (částečné) uspořádání na množině $\mathfrak{P}(X)$ všech podmnožin množiny X.

> (Všimněte si, že inkluse je v jistém smyslu universálním uspořádáním. Každé částečné uspořádání je totiž možno representovat jako systém (některých) podmnožin vhodné množiny uspořádaných inklusí: máme
>
> $$x \leq y \quad \text{právě když} \quad \downarrow x \subseteq \downarrow y.)$$

1.5.1 Je li relace R (před)uspořádání, je i relace R^{op} definovaná předpisem

$$xR^{\text{op}}y \quad \text{právě když} \quad yRx$$

(před)uspořádání. Mluvíme o něm jako o (před)uspořádáním *opačném* nebo *duálním* k R. Často píšeme

$$(X, R)^{\text{op}} \quad \text{místo} \quad (X, R^{\text{op}}).$$

1.6. Jsou-li $(X, \leq)$, $(Y, \leq)$ částečně uspořádané množiny (první $\leq$ samozřejmě nemusí být totéž co druhé) a $f : X \to Y$ zobrazení, říkáme, že je f *isotonní* (často se též říká *monotonní* [1]) platí-li implikace

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y).$$

[1] Je to dokonce běžnější, legitimní námitka proti tomuto výrazu je jeho použití jako společného termínu pro nerostoucí a neklesající funkce v analyse.

Platí-li implikace $x \leq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y)$, říkáme, že f je *antitonní* (pak je ovšem f isotonní jako zobrazení $(X, \leq) \to (Y, \leq)^{\mathrm{op}}$).

Jako u obecných relací či relačních systémů říkáme, že f je *isomorfismus* a že $(X, \leq)$ a $(Y, \leq)$ jsou *isomorfní* existuje-li isotonní $g : (Y, \leq) \to (X, \leq)$ takové, že $f \cdot g = \mathrm{id}$ a $g \cdot f = \mathrm{id}$, Snadno vidíme, že f je isomorfismus právě když

- je to zobrazení na, a
- $x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq f(y)$.

2. Suprema a infima

2.1. Buď $(X, \leq)$ částečně uspořádaná množina. Řekneme, že prvek $x \in X$ je *horní* (resp. *dolní*) *mez* podmnožiny $M \subseteq X$, platí-li

$$M \subseteq \downarrow x \quad (\text{resp. } M \subseteq \uparrow x).$$

Nejmenší taková horní mez (pokud existuje, což samozřejmě nemusí) se nazývá *supremum* a označuje se

$$\sup M$$

(později budeme užívat také jiné symboly). Největší dolní mez množiny M se nazývá jejím *infimem* a označuje

$$\inf M.$$

2.1.1. Tedy, supremum množiny M je prvek s takový, že platí (1) $M \subseteq \downarrow s$ a (2) $M \subseteq \downarrow x \ \Rightarrow \ s \leq x$. Z kursu matematické analysy znáte místo (2) jinou podmínku:

$$x < s \quad \Rightarrow \quad \exists y \in M, x < y. \tag{2'}$$

Uvědomte si, že v případě lineárního uspořádání tak dostáváme ekvivalentní definici, obecně by to však ekvivalentní nebylo.

2.1.2. Buď $(X, \leq)$ uspořádaná množina, $M \subseteq N \subseteq X$. Řekneme, že M je *nahoru* resp. *dolu kofinální* s N jestliže pro každý prvek $n \in N$ existuje

$m \in M$ takový, že $m \geq n$ resp. $m \leq n$. Je-li z kontextu jasno, o který směr se jedná, říká se prostě *kofinální.*

Často se užívá následující

Pozorování. *Je-li* M *nahoru (resp. dolu) kofinální s* N *a existuje-li* $\sup N$ *(resp.* $\inf N$*) pak* $\sup M$ *(resp.* $\inf M$*) také existuje a platí* $\sup M = \sup N$ *(resp.* $\inf M = \inf N$*).*

2.2. Tvrzení. *Platí formule*

$$\sup\{\sup M_j \;|j \in J\} = \sup(\bigcup_{j\in J} M_j),$$
$$\inf\{\inf M_j \;|j \in J\} = \inf(\bigcup_{j\in J} M_j)$$

kdykoli mají levé strany smysl.

Důkaz provedeme pro suprema. Položme

$$s_j = \sup M_j, \quad s = \sup\{s_j \;|j \in J\}.$$

Potom je s zřejmě horní mezí množiny $\bigcup_{j\in J} M_j$. Je-li $\bigcup_{j\in J} M_j \subseteq\downarrow x$ je pro každé j, $M_j \subseteq\downarrow x$ a tedy $s_j \leq x$. Z toho $\{s_j \;|j \in J\} \subseteq\downarrow x$ a konečně $s \leq x$. $\square$

2.3. Protože $\emptyset \subseteq\downarrow x, \uparrow x$ pro každé x, je $\sup \emptyset$ nejmenší prvek dané uspořádané množiny X (pokud existuje). Běžně se označuje

$$\perp \quad \text{nebo též} \quad 0.$$

Podobně $\inf \emptyset$ je největší prvek, obykle označovaný

$$\top \quad \text{nebo též} \quad 1.$$

Zároveň samozřejmě plati, pokud nejmenší resp. největší prvek existuje,

$$\inf X = \perp \ (= \sup \emptyset) \quad \text{resp.} \quad \sup X = \top \ (= \inf \emptyset).$$

2.3.1. Poznámka. Nezaměňujte nejmenší prvky s prvky minimálními. Prvek $x \in X$ je *minimální* v $(X, \leq)$ platí-li implikace $y \leq x \;\Rightarrow\; y = x$. Nejmenší prvek je vždy minimální, ale ne každý minimální prvek je nejmenší.

Podobně, prvek $x \in X$ je *maximální* v $(X, \leq)$ platí-li implikace $y \geq x \;\Rightarrow\; y = x$.

2.4. Příklady. (a) Suprema a infima podmnožin reálných čísel $\mathbb{R}$ jak je znáte z kursu matematické analysy. Uvědomte si, že $-\infty$ resp. $+\infty$ je přidaný nejmenší resp. největší prvek k množině $\mathbb{R}$, která sama největší ani nejmenší prvek nemá. Odtud formulky $\inf \emptyset = +\infty$, $\sup \emptyset = -\infty$, které studenty prvních ročníků někdy překvapují.

(b) V $(\mathfrak{P}(X), \subseteq)$ máme

$$\sup\{A_j \mid j \in J\} = \bigcup_{j \in J} A_j, \quad \inf\{A_j \mid j \in J\} = \bigcap_{j \in J} A_j.$$

(c) V množině přirozených čísel s uspořádáním "a dělí b" je $\sup\{a, b\}$ nejmenší společný násobek čísel a, b a $\inf\{a, b\}$ největší společný dělitel čísel a, b.

2.5. Je-li $f : (X \leq) \to (Y, \leq)$ isotonní zobrazení, máme triviálně

$$f[\downarrow x] \subseteq \downarrow f(x) \quad \text{a} \quad f[\uparrow x] \subseteq \uparrow f(x),$$

takže je-li x horní (dolní) mez množiny M, je $f(x)$ horní (dolní) mez množiny $f[M]$. Tedy speciálně

$$\sup f[M] \leq f(\sup M), \quad \inf f[M] \geq f(\inf M) \tag{$*$}$$

(mají-li ty výrazy smysl). Víc obecně neplatí. Zachovávání (některých, nebo všech) suprem či infim je důležitá vlastnost některých speciálních typů zobrazení. Zapamatujte si, že nerovnosti $(*)$ platí obecně; při ověřování případných rovností se budeme starat jen o příslušnou opačnou nerovnost.

Snadno ale vidíme, že isomorfismy suprema i infima zachovávají.

3. Některá speciální uspořádání

Při užití (částečných) uspořádání v různých oborech matematiky a informatiky se setkáváme se speciálními požadavky. V tomto oddíle několik z nich uvedeme.

3.1. Polosvazy. Řekneme, že uspořádaná množina je *dolní* (respektive *horní*) *polosvaz* jestliže pro libovolné dva prvky x, y existuje $\inf\{x, y\}$ (respektive $\sup\{x, y\}$). Často užívané označení je

$$x \wedge y \;\text{ pro }\; \inf\{x, y\} \;\text{ a }\; x \vee y \;\text{ pro }\; \sup\{x, y\}$$

(jiné užívané značky jsou třeba $x \cap y$, $x \sqcap y$ a pod.).

Podle 2.2 v dolním polosvazu existují infima všech *neprázdných* konečných podmnožin. Pro existenci infim všech konečných podmnožin musíme navíc požadovat největší prvek; potom se obvykle mluví o *dolním polosvazu s jednotkou*.

Podobně v *horních polosvazech s nulou* máme suprema všech konečných množin.

Často je z kontextu patrno jde-li o suprema či infima, potom mluvíme prostě o *polosvazu*.

3.2. Svazy. Je-li uspořádaná množina zároveň dolní a horní polosvaz, řekneme, že je to *svaz*. Opět, nejsou při tom automaticky požadovány extrémní prvky. Pokud je máme, mluvíme obvykle o *svazu s nulou a jednotkou*, někdy se též říká *omezený svaz*.

3.3. Úplné svazy. *Úplný svaz* je uspořádaná množina v níž každá podmnožina má supremum a infimum.

Věta. *Uspořádaná množina je úplný svaz právě když v ní má každá podmnožina supremum. Podobně s infimy.*

Důkaz. Hledejme infimum množiny M za předpokladu existence suprem. Položme

$$N = \{x \mid M \subseteq \uparrow x\}, \ i = \sup N.$$

Pro každé $y \in M$ máme $N \subseteq \downarrow y$, proto $i \leq y$, a i je tedy dolní mez množiny M. Je-li $M \subseteq \uparrow x$, je $x \in N$ a tedy $x \leq i$, takže $i = \inf M$. $\square$

Na polosvazy nemůžeme stejný postup použít, protože i když M je konečná, množina N z důkazu může být nekonečná. V konečném případě s tím ale problém není a dostáváme, že

každý konečný horní polosvaz s nulou je svaz s nulou a jednotkou.

3.4. Usměrněné (pod)množiny. Podmnožinu D uspořádané množiny nazveme *usměrněnou*, má-li každá konečná $K \subseteq D$ horní mez v D. Jinými slovy, D je usměrněná jestliže je neprázdná a jestliže pro každé $x, y \in D$ existuje $z \in D$ takové, že $x, y \leq z$. Uvědomte si, že předpoklad neprázdnosti je podstatný.

Přesněji bychom měli mluvit o nahoru usměrněné množině. V běžných aplikacích však daleko častěji pracujeme s tímto než s duálním pojmem a je proto zvykem tuto specifikaci vynechávat.

Pozorování. *Horní polosvaz který má suprema všech usměrněných podmnožin má suprema všech neprázdných podmnožin.*

(Máme $\sup M = \sup\{\sup K \mid K$ konečná $\subseteq M\}$, a množina $\{\sup K \mid K$ konečná $\subseteq M\}$ je zřejmě usměrněná.)

3.5. DCPO. V teoretické informatice hrají velmi důležitou roli uspořádaná množiny takové, že v nich každá usměrněná podmnožina má supremum. Přes svou důležitost se nedočkaly speciálního názvu - i v anglické literatuře se pro ně používá prostě zkratka DCPO (directed-complete partial order). Nebudeme se pokoušet o český termín a taky budeme této zkratky užívat.

Poznamenejme ještě, že v řadě aplikací stačí požadovat méně, totiž jen existenci suprem neklesajících posloupností

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots .$$

3.6. Poznámka o označení. V úplných svazech se pro suprema resp. infima běžně užívá symbolů $\bigvee$ resp. $\bigwedge$ (také případně jiných značek, $\bigsqcup$, $\bigcup$ a pod.), tedy třeba

$$\bigvee\{x \mid x \in M\}, \bigvee_{j\in J} x_j, \quad \text{atd.}$$

Na $\bigvee, \bigwedge$ a pododobné značky se nahlíží jako na funkční nebo operační symboly, podobně jako na $a \vee b$, $a \wedge b$ v 3.1 (viz též následující kapitolu).

Symbolů sup a inf se užívá spíše v případech kdy to supremum nebo infimum nemusí nutně existovat; tato konvence není vždy dodržována, ale je celkem běžná.

Rovněž suprema usměrněných množin za předpokladu jejich povinné existence se někdy označují “funkčními” symboly jako $\bigvee^{\uparrow}$ či $\bigcup^{\uparrow}$. Takto modifikovaný symbol samozřejmě jen připomíná, že do “operace” vstupuje usměrněná množina, ne že by se snad mělo jednat o nový typ suprema.

4. Dedekindovo-MacNeilleovo zúplnění

4.1. V obecné částečně uspořádané množině suprema či infima podmnožin často schází. Je přirozená otázka, zda je můžeme nějak vhodně přidat, zda můžeme naší uspořádanou množinu $(X \ \leq)$ rozšířit tak, aby vznikl úplný svaz. Pokud by nám nešlo o nic víc, odpověď je jednoduchá: při representaci prvku $x \in X$ jako $\downarrow x \in \mathfrak{P}(X)$ máme naší množinu vloženu do úplného svazu $\mathfrak{P}(X)$. Platí při tom i víc: má-li $M \subseteq X$ infimum i, je $\downarrow i = \bigcap\{\downarrow x \mid x \in M\}$, což je infimum množiny $\{\downarrow x \mid x \in M\}$. Toto rozšíření tedy zachová všechna existující infima.

Jenomže se supremy je to špatné: jestliže třeba $a \vee b$ exisuje, je $\downarrow(a \vee b)$ zřídka totéž co $\downarrow a \cup \downarrow b$. Otázku doplnění uspořádané množiny bychom si měli správně položit takto:

> *Je možno každou (částečně) uspořádanou množinu X rozšířit na úplný svaz L tak, aby při tom všechna již v X existující infima resp. suprema byla infimy resp. supremy i v L?*

Odpověď je kladná a budeme se jí věnovat v tomto oddíle.

4.2. Konstrukce. Pro podmnožinu M uspořádané množiny X položme

$$\begin{aligned}&\mathsf{ub}(M) = \{y \mid y \text{ je horní mez } M\},\\ &\mathsf{lb}(M) = \{y \mid y \text{ je dolní mez } M\},\\ &\nu(M) = \mathsf{lb}(\mathsf{ub}(M)).\end{aligned}$$

Konečně definujme

$$\mathsf{MacN}(X, \leq) = (\{M \subseteq X \mid \nu(M) = M\}, \subseteq).$$

4.3. Lemma.(1) *Je-li $M \subseteq N$, je $\mathsf{ub}(M) \supseteq \mathsf{ub}(N)$ a $\mathsf{lb}(M) \supseteq \mathsf{lb}(N)$.*
(2) *$M \subseteq \nu(M) = \mathsf{lb}(\mathsf{ub}(M))$ a $M \subseteq \mathsf{ub}(\mathsf{lb}(M))$.*
(3) *$\mathsf{ub}(\downarrow a) = \uparrow a$ a $\mathsf{lb}(\uparrow a) = \downarrow a$.*
(4) *ν je monotonní.*
(5) *$\nu\nu(M) = \nu(M)$.*

Důkaz. (1) až (4) jsou bezprostřední pozorování. Podle (1) a (2) dále máme $\mathsf{lb}(M) \subseteq \mathsf{lb}(\mathsf{ub}(\mathsf{lb}(M))) \subseteq \mathsf{lb}(M)$ a $\mathsf{ub}(M) \subseteq \mathsf{ub}(\mathsf{lb}(\mathsf{ub}(M))) \subseteq \mathsf{ub}(M)$, takže $\mathsf{lb}(M) = \mathsf{lb}(\mathsf{ub}(\mathsf{lb}(M)))$ a $\mathsf{ub}(M) = \mathsf{ub}(\mathsf{lb}(\mathsf{ub}(M)))$ a konečně $\mathsf{lb}(\mathsf{ub}(M))$ $= \mathsf{lb}(\mathsf{ub}(\mathsf{lb}(\mathsf{ub}(M))))$. $\square$

4.4. Věta. (1) *$L = \mathsf{MacN}(X)$ je úplný svaz. Suprema v L jsou dána formulí $\bigvee_{j \in J} M_j = \nu(\bigcup_{j \in J} M_j)$.*

(2) *Zobrazení $a \mapsto \downarrow a$ je vložení (t.j., prosté zobrazení takové, že $a \leq b$ právě když $\downarrow a \subseteq \downarrow b$) zachovávající všechna v X existující suprema a infima.*

Důkaz. (1): Je-li $\nu(M) = M$ a platí-li $M \supseteq M_j$ pro všechna $j \in J$ máme $M \supseteq \bigcup M_j$ a tedy $M = \nu(M) \supseteq \nu(\bigcup M_j)$.

(2): Podle 4.3, $\nu(\downarrow a) = \mathsf{lb}(\mathsf{ub}(\downarrow a)) = \mathsf{lb}(\uparrow a) = \downarrow a$ takže skutečně $\downarrow a \in \mathsf{MacN}(X)$; zřejmě $a \leq b$ právě když $\downarrow a \subseteq \downarrow b$ a navíc pro $a = \inf a_j$ je $\downarrow a = \bigcap \downarrow a_j$, t.j. infimum již v $\mathfrak{P}(X)$ a tím spíš v $\mathsf{MacN}(X)$. Konečně máme

$$\bigvee_j \downarrow a_j = \nu(\bigcup_j \downarrow a_j) = \mathsf{lb}(\mathsf{ub}(\bigcup \downarrow a_j)) =$$
$$= \mathsf{lb}\{x \mid \forall j,\ x \geq a_j\} = \mathsf{lb}(\uparrow a) = \downarrow a. \quad \square$$

4.5. Poznámka. Speciální případ tohoto rozšíření je Dedekindova konstrukce reálných čísel z racionálních pomocí t.zv. “metody řezů”.

5. Složitější z jednodušších

5.1. Připomeňte si konstrukce z I.6.

Snadno vidíme, že podobjekt uspořádané množiny $(X, \leq)$ získaný z libovolné podmnožiny $Y \subseteq X$ je opět uspořádaná množina. O uspořádání $\leq |Y$ se často mluví jako o uspořádání *indukovaném* uspořádánímm na větší množině. Užívá se pro něj obvykle stejného symbolu, což sotva může vést k nedorozumění.

Také produkt $\prod(X_i, R_i)$ v němž všechny objekty (X_i, R_i) jsou uspořádané množiny je uspořádaná množina, což opět vidíme bez jakýchkoli problémů.

Jinak je tomu s kvocienty: ztotožníme-li třeba v řetězu $\{1 < 2 < \cdots < n\}$ kde $n \geq 4$ první a poslední prvek, nedostaneme ani předuspořádání. Na druhé straně sumy uspořádaných množin (jako v I.7.3) uspořádané jsou.

5.2. Co se v součinech nezachovává je ale linearita. Všimněte si, že pomocí produktů a podobjektů dostaneme libovolnou částečně uspořádanou množinu již z dvoubodového řetězce

$$\mathbf{2} = (\{0, 1\}, \leq).$$

Skutečně, pro libovolnou množinu M je mocnina (produkt stejných objektů, viz I.6.3)

$$\mathbf{2}^M \quad \text{isomorfní s} \quad (\mathfrak{P}(M), \subseteq)$$

(k $(x_m)_{m\in M}$ přiřaďte podmnožinu $\{m \,|x_m = 1\}$) a připomeňte si 1.4.

5.3. Na vložení obecné uspořádané množiny $(X, \leq)$ do $\mathbf{2}^X$ se můžeme dívat jako na vytváření (libovolně) složitého objektu daného typu z objektu velmi jednoduchého. Teoreticky je i tato triviální konstrukce významná, prakticky si ale moc nepomůžeme: součin je zde příliš velký.

Zajímavější je vkládání konečných uspořádaných množin do součinu obecnějších lineárních uspořádání, které i probereme nyní.

5.3.1. Lemma. *Buď $(X, \leq)$ linovolná konečná uspořádaná množina. Potom pro libovolné dva nesrovnatelné body a, b z X existuje homomorfismus*

$$\phi_{ab} : (X, <) \to (\mathbb{N}, <)$$

takový, že $\phi_{ab}(a) < \phi_{ab}(b)$.

(Pozor: Jde o homomorfismus vzhledem k relacím *ostrého* uspořádání, tedy o víc než isotonii.)

Důkaz. Z technických důvodů přidejme k $(X, \leq)$ ještě nový nejmenší prvek $\perp$, tedy $\perp < x$ pro všechny $x \in X$. Označme ještě $\prec$ relaci bezprostředního následováná (t.j., $x \prec y$ jestliže $x < y$ a kdykoli $x < z \leq y$ pak $z = y$).

Pro zobrazení $\alpha : \{(x, y) \,|x \prec y\} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definujme

$$\phi_\alpha(x) = \max\{\sum \alpha(x_i, x_{i+1}) \,|x_0 = \perp \prec x_1 \prec \cdots \prec x_n = x\}.$$

Zřejmě platí

$$x < y \quad \Rightarrow \quad \phi_\alpha(x) < \phi_\alpha(y).$$

Jelikož a, b jsou nesrovnatelné, existuje dvojice $c \prec b$, která se nevyskytuje v žádném řetězci $x_0 = \perp \prec x_1 \prec \cdots \prec x_n = a$. Zvolíme-li $\alpha(c, b)$ dost veliké, a všechny ostatní hodnoty $\alpha(x, y) = 1$, bude $\phi_\alpha(x) < \phi_\alpha(b)$. $\square$

5.3.2. Tvrzení *Každou konečnou uspořádanou množinu je možno vložit do mocniny $\mathbb{N}^k$ s konečným k.*

Důkaz. Je-li $(X, \leq)$ lineární, není co dokazovat.

Jinak, ke každé dvojici (a, b) nesrovnatelných elementů zvolme ϕ_{ab} podle lemmatu a označme Φ množinu takto zvolených zobrazení. Vezměme

$$(\mathbb{N}, <)^\Phi$$

a definujme $\iota : (x, <) \to (\mathbb{N}, <)^\Phi$ požadavkem $p_\phi \iota = \phi$ (podle 6.3.2 je tím ι jednoznačně definováno; nenechte se vylekat tím, že ϕ vystupuje jako index i jako homomorfismus, proti tomu nic nemluví). Potom je ι vložení podobjektu: relaci $<$ samozřejmě zachovává a není-li $x = y$ ani $x < y$ ani $y < x$ nemohou být $\iota(x)$ a $\iota(y)$ srovnatelná, protože $p_{\phi_{xy}}\iota(x) = \phi_{xy}(x) < p_{\phi_{xy}}\iota(y)$ zatímco $p_{\phi_{yx}}\iota(x > p_{\phi_{yx}}\iota(y)$, a projekce by relaci zachovala. $\square$

Poznámky. 1. Všimněte si podstatného faktu, že je-li zde x representováno posloupností čísel $(x_1, \ldots, x_k)$, a větší y pomocí $(y_1, \ldots, y_n)$, je $x_i < y_i$ pro všechna i. To sehraje roli v dalším bodě.

2. Čtenář má pravděpodobně dojem, že jsme si opět moc nepomohli. Počet nesrovnatelných dvojic (a tedy exponent z důkazu) je stále ještě dost velký. Jenomže zatím co v representaci pomocí $\mathbf{2}^M$ je velikost exponentu podstatná, zde šlo jen o technický postup a ve skutečnosti stačí často exponent velmi malý.

5.4. Lemma 5.3.1 dává též další způsob jak popsat uspořádání z lineárních (jedná se ale v podstatě o totéž jako v předchozí větě)

Tvrzení. *Každé konečné uspořádání je průnik lineárních uspořádání.*

Důkaz. Pro $\phi \in \Phi$ v důkazu předchozí věty definujme lineární uspořádání $\leq_\phi$ takto: prvky z každé $\phi^{-1}[\{i\}]$ seřaďme libovolně a je-li $\phi(x) < \phi(y)$ položme $x <_\phi y$. Potom je

$$\leq \; = \bigcap_{\phi \in \Phi} \leq_\phi \, .$$

Skutečně, je-li $x < y$, je $\phi(x) < \phi(y)$, a tedy $x <_\phi y$, pro každé ϕ. Jsou-li x a y nesrovnatelné, máme $x <_{\phi_{xy}} y$ a $y <_{\phi_{yx}} x$, takže (x, y) v průniku není. $\square$

Díváme-li se na lineární uspořádíní jako na v jistém smyslu jednoduchá, vyjadřuje nejmenší potřebný počet lineárních uspořádání v representaci z tohoto tvrzení jakousi míru složitosti daného uspořádání $\leq$. Nazývá se

Dushnik-Millerova dimense uspořádání $\leq$.

Jako cvičení dokažte, že minimální exponent z 5.3 je totéž číslo.

6. Adjunkce (Galoisova konexe)

6.1. Isotonní zobrazení $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ jsou *adjungována* (*Galoisovsky adjungována*, jsou v *Galoisově konexi*), f nalevo a g napravo (f je *levý adjunkt* zobrazení g, g je *pravý adjunkt* zobrazení f) jestliže platí

$$\text{pro všechna } x \in X, y \in Y, \quad f(x) \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x \leq g(y).$$

6.2. Pravý (resp. levý) Galoisův adjunkt nemusí k danému zobrazení existovat (brzy se k tomu dozvíme nutnou, a do jisté míry i postačující podmínku). Existuje-li však,

je určen jednoznačně.

(Je-li $f_i(x) \leq y \;\Leftrightarrow\; x \leq g(y)$, $i = 1, 2$, je $f_1(x) \leq y \;\Leftrightarrow\; f_2(x) \leq y$.)

6.3. Příklady. (a) Vzájemně inversní isomorfismy jsou adjungovány, a to zprava i zleva.

(b) "Téměř inversní celočíselné funkce": Nechť se zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (kde $\mathbb{N}$ je zde množina kladných celých čísel) dá rozšířit na reálnou rostoucí funkci $\widetilde{f}$ na intervalu $\langle 1, +\infty)$ která má inversní funkci ϕ. Potom, označíme-li $\lfloor x \rfloor$ resp. $\lceil x \rceil$ dolní resp. horní celou část reálného čísla x, je

$$\begin{aligned} &\lceil \phi(-) \rceil \text{ levý adjunkt zobrazení} f, \text{ a} \\ &\lfloor \phi(-) \rfloor \text{ pravý adjunkt zobrazení} f \end{aligned}$$

(což okamžitě vidíme z toho, že $\lceil \phi(m) \rceil \leq n$ právě když $\phi(m) \leq n$, a $\lfloor \phi(m) \rfloor \geq n$ právě když $\phi(m) \geq n$).

Tak například jsou $\lceil \log_2 \rceil$ a $\lfloor \log_2 \rfloor$ levý a pravý adjunkt k mocnění 2^n.

(c) Buďte X, Y libovolné množiny a $f : X \to Y$ zobrazení mezi nimi. Máme

$$f[A] \subseteq B \quad \text{právě když} \quad A \subseteq f^{-1}[B].$$

Tedy jsou zobrazení $f[-] : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(Y), f^{-1}[-] : \mathfrak{P}(Y) \to \mathfrak{P}(X)$ adjungovány, $f[-]$ nalevo a $f^{-1}[-]$ napravo.

(d) $f^{-1}[-]$ mé též pravý adjunkt, je totiž

$$f^{-1}[B] \subseteq A \quad \text{právě když} \quad B \subseteq Y \setminus f[X \setminus A].$$

$f[-]$ ale levý adjunkt nemá.

(e) Buď M množina ("abeceda"), M^+ pologrupa slov v M a $X = \mathfrak{P}(M^+)$. Označíme-li pro $A, B, C \in X$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \{ab \mid a \in A, b \in B\}, \\ C/B &= \{w \mid \forall b \in B,\ wb \in C\}, \\ A \backslash C &= \{w \mid \forall a \in A,\ aw \in C\}, \end{aligned}$$

platí

$$A\cdot B\subseteq C \quad \text{právě když} \quad A\subseteq C/B \quad \text{právě když} \quad B\subseteq A\backslash C.$$

Zobrazení $(A\mapsto A\cdot B):X\to X$ resp. $(B\mapsto A\cdot B):X\to X$ jsou tedy levé adjunkty k $C\mapsto C/B$ resp. $C\mapsto A\backslash C$.

6.4. Výhodný popis adjunkcí dostáváme z následujícího tvrzení.

Věta. *Isotonní zobrazení $f:X\to Y$ a $g:Y\to X$ jsou adjungována (f nalevo, g napravo) právě když platí*

$$f(g(y))\leq y \quad a \quad x\leq g(f(x) \quad (\textit{symbolicky} \quad fg\leq \mathrm{id}\ a\ gf\geq \mathrm{id}).$$

Důkaz. Jsou-li f,g v adjunkci, plynou nové nerovnosti z toho, že $g(y)\leq g(y)$ a $f(x)\leq f(x)$. Nechť naopak nové nerovnosti platí; je-li $f(x)\leq y$ máme $x\leq g(f(x))\leq g(y)$, je-li $x\leq g(y)$ je $f(x)\leq f(g(y))\leq y$. □

6.5. Důsledek. Jsou-li isotonní zobrazení f,g adjungována, platí

$$fgf=f \quad \text{a} \quad gfg=g.$$

(Jelikož $gf(x)\geq x$ je $f(gf(x))\geq f(x)$; na druhé straně je $fg(f(x))\leq f(x)$. □)

6.6. Věta. *Levé Galoisovy adjunkty zachovávají suprema, a pravé zachovávají infima.*

Důkaz provedeme pro suprema. Nechť $s=\sup M$ existuje. Potom je především $f(s)$ horní mezí množiny $f[M]$. Je-li x horní mez $f[M]$ máme, pro všechna $m\in M$, $f(m)\leq x$ a tedy $m\leq g(x)$. Je tedy $g(x)$ horní mez množiny M, odtud $s\leq g(x)$ a konečně $f(s)\leq x$. □

6.7. Větu 6.6 nelze beze všeho obrátit. Není divu, kdyby uspořádané množiny X,Y měly suprema či infima jen pro málo podmnožin, byla by podmínka jejich zachování slabá. Platí však

Věta. *Jsou-li X,Y úplné svazy, je isotonní zobrazení $f:X\to Y$ levý (resp. pravý) adjunkt právě když zachovává všechna suprema (resp. infima).*

Důkaz. Nechť f zachovává suprema. Definujme zobrazení $g:Y\to X$ předpisem

$$g(y)=\sup\{x\ |f(x)\leq y\}.$$

Potom, triviálně, $f(x) \leq y$ implikuje $x \leq g(y)$. Je-li naopak $x \leq g(y) = \sup\{z \,|f(z) \leq y\}$, dostáváme

$$f(x) \leq \sup\{f(z) \,|f(z) \leq y\} \leq y. \qquad \square$$

6.8. Poznámka. Původní Galoisova konexe, tak jak se objevila v Galoisově teorii řešitelnosti algebraických rovnic, byla konexe mezi antitonními zobrazeními,

$$f(x) \leq y \quad \text{právě když} \quad g(y) \leq x.$$

S touto variantou v literatuře dosud často setkáváme. Kromě původnosti pro ni ale mnoho nemluví: isotonní definice je průhlednější, a antitonní varianta s z ní snadno naformuluje (isotonní varianta naformulovaná přes antitonní mi naopak připadá dost křečovitá).

7. Dvě věty o pevných bodech

7.1. Věta. (Bourbakiho věta o pevném bodě.) *Nechť v $(X, \leq)$ existuje nejmenší prvek a nechť tam má každý řetězec*

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots$$

supremum. Nechť $f : X \to X$ zachovává suprema takovýchto řetězců. Potom f má pevný bod (t.j., existuje $y \in X$ takové, že $f(y)$), a mezi pevnými body existuje nejmenší.

Důkaz. Položme $x_0 = \perp$ a definujme x_n předpisem $x_{n+1} = f(x_n)$. Jelikož $x_0 = \perp \leq x_1$ dostáváme indukcí $x_{n+1} = f(x_n) \leq f(x_{n+1}) = x_{n+2}$ a tedy platí $x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots$. Označme $y = \sup x_n$. Potom $f(y) = \sup f(x_n) = \sup x_{n+1} = y$ a y je pevný bod.

Buď též $f(z) = z$. Máme $\perp \leq z$ a tedy indukcí $x_{n+1} = f(x_n) \leq f(z) = z$, takže z je horní mez řetězce $x_0, x_1, x_2, \ldots$, a tedy $y \leq z$. $\square$

7.2. Třebaže je to věta velmi jednoduchá, má důležité důsledky. Jedním z nich je známá *První Kleeneova věta o rekursi.*

Uvažujme množinu $X = \{f \,|f : A \rightharpoonup B\}$ parciálních zobrazení z množiny A do množiny B uspoádanou relací rozšíření, t.j.,

$f \sqsubseteq g$ právě když definiční obor $D(f)$ funkce f je obsažen v definičním oboru $D(g)$ funkce g a na $D(f)$ je $f(x) = g(x)$.

Spojitý funkcionál $f : X \to X$ je isotonní zobrazení takové,že

$$\textit{je-li } F(f)(a) = b, \textit{ existuje konečná } g \sqsubseteq f \textit{ taková, že } F(g)(a) = b.$$

(Například: $A = B$ je množina přirozených čísel a F je rekursní pravidlo.) Platí

Věta. (Kleene) *Pro každý spojitý funkcionál F existuje nejmenší f takové, že $F(f) = f$.*

Důkaz. Máme dokázat, že F zachovává suprema řetězců. Pro řetězec $f_1 \sqsubseteq f_2 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq f_n \sqsubseteq \cdots$ je zřejmě supremem zobrazení f definované na $\bigcup D(f_n)$ předpisem $f(x) = f_n(x)$ na $D(f_n)$.

Triviálně platí, že $\sup F(f_n) \sqsubseteq F(f)$. Na druhé straně, je-li $F(f)(a) = b$, je $f(g)(a) = b$ pro nějaké konečné $g \sqsubseteq f$. Z konečnosti, $g \sqsubseteq f_k$ pro dostatečně velké k; tedy $F(f_k)(a) = b$. Tedy je i $(\sup F(f_n))(a) = b$. $\square$

7.3. Věta. (Tarského-Knasterova věta o pevném bodě) *Každé isotonní zobrazení úplného svazu do sebe má pevný bod.*

Důkaz. Buď L úplný svaz a $f : L \to L$ isotonní. Položme $M = \{x \mid x \leq f(x)\}$ a $s = \sup M$. Pro $x \in M$ je $x \leq s$ a tedy $x \leq f(x) \leq f(s)$ takže $f(s)$ je horní mez množiny M a máme

$$s \leq f(s),$$

a z isotonie $f(s) \leq f(f(s))$, takže $f(s) \in M$. Proto též

$$f(s) \leq s,$$

a konečně tedy $f(s) = s$. $\square$

Poznámka. Dokázali jsme vlastně, že existuje *největší* pevný bod zobrazení f. Obdobnou úvahou o $\inf\{x \mid x \geq f(x)\}$ dostaneme existenci nejmenšího pevného bodu.

7.4. Důkaz této věty o pevném bodě byl opět velmi jednoduchý. Věta však má mnoho velmi důležitých a netriviálních důsledků. Dva z nich předvedeme.

7.4.1. Cantor-Bernsteinova věta. *Buďte $f : X \to Y$ a $g : Y \to X$ prostá zobrazení. Potom existuje vzájemně jednoznačné zobrazení h množiny X na množinu Y. Toto zobrazení je možno nalézt takové, že v každém bodě je $h(x)$ definováno buď ve shodě s f, nebo inversně s g.*

Důkaz. Definujme $F : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ předpisem $F(M) = X \setminus g[Y \setminus f[M]]$ a vezměme A některý jeho pevný bod. Máme tedy

$$A = X \setminus g[Y \setminus f[A]], \quad \text{to jest} \quad X \setminus A = g[Y \setminus f[A]]. \qquad (*)$$

Položme

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ pro } x \in A \\ g^{-1}(x) \text{ pro } x \notin A \end{cases}$$

(podle $(*)$ má takové $g^{-1}(x)$ pro $x \notin A$ smysl, samozřejmě jednoznačný).

Jelikož g je prosté, máme podle $(*)$, $g^{-1}[X \setminus A] = g^{-1}g[Y \setminus f[A]] = Y \setminus f[A]$ takže pro $x \in A$ a $y \in X \setminus A$ je $h(x) \neq h(y)$; pro $x \neq y$ a $x, y \in A$ nebo $x, y \notin A$ je $h(x) \neq h(y)$ triviálně. Tedy je h prosté.

Pro $y \in Y$ je buď $y \in f[A]$ a pak je h-obrazem prvku z A, nebo je $y \in Y \setminus f[A]$ a potom je $y = h(g(y))$. Zobrazení h je tedy na. $\square$

7.4.2. Stabilita her dvou osob s úplnou informací. *Hru* dvou osob s úplnou informací můžeme popsat takto: je dána množina X (množina možných stavů hry), relace $A \subseteq X \times X$ (pravidla pro prvního hráče), relace $B \subseteq X \times X$ (pravidla pro druhého hráče), a prvek $x_0 \in X$ (počáteční stav). *Partie* v takové hře je posloupnost

$$x_0 A x_1 B x_2 A x_3 \cdots \quad \text{(konečná nebo nekonečná)} \quad .$$

Hráč *prohrává* je-li na tahu, ale pravidla už mu hrát nedovolí, v té situaci pak druhý vyhrává. Nekonečnou partii vyhodnocujeme jako remisu.

Strategie pro prvního resp. druhého hráče je podmnožina $S \subseteq A$ resp. $S \subseteq B$. Strategie je *vytrvalá*, umožňuje-li zůstat ve hře pokud už se do ní hráč dostal, t.j., dejme tomu pro prvního hráče,

$$\text{kdykoli } xSy \text{ a } yBz \text{ existuje } u \text{ takové, že } zSu.$$

Vytrvalá strategie S ještě nezaručuje, že hráč neprohraje; k tomu se musí ještě dostat do stavu v němž S může použít. Tedy, *neprohrávající* strategie prvního hráče je taková vytrvalá strategie S pro kterou $x_0 S \neq \emptyset$, a pro druhého hráče musí být taková, že $yS \neq \emptyset$ pro každé y takové, že $x_0 A y$.

Věta. *Aspoň jeden z hráčů má neprohrávající strategii.*

Důkaz. Pro $P \subseteq X \times X$ položme $r(P) = \{(x, y) \mid yP = \emptyset\}$ a pro pevná $A, B \subseteq X \times X$ definujme zobrazení $\phi_{AB} : \mathfrak{P}(X \times X) \to \mathfrak{P}(X \times X)$, zřejmě isotonní, předpisem

$$\phi_{AB}(P) = A \cap r(B \cap r(P)).$$

Vezměme A, B relace z definice hry, zvolme S_{II} nějaký pevný bod zobrazení ϕ_{BA} (takže

$$S_{II} = B \cap r(A \cap r(S_{II}))\ )$$

a položme $S_I = A \cap r(S_{II})$. Potom je S_I pevný bod ϕ_{AB} (máme $\phi_{AB}(S_I) = A \cap r(B \cap r(A \cap r(S_{II}))) = A \cap r(S_{II}) = S_I$).

> **Fakt.** S_I resp. S_{II} je vytrvalá strategie prvního resp. druhého hráče.
>
> (Třeba pro S_{II}: Buď $xS_{II}y$ a yAz. Kdyby $zS_{II} = \emptyset$, bylo by $(y,z) \in A \cap r(S_{II})$. Jenomže $(x,y) \in S_{II} \subseteq r(A \cap r(S_{II})$ a tedy by množina $y(A \cap r(S_{II})$ měla být prázdná. $\square$)

Předpokládejme nyní, že druhý hráč prohraje. Tedy, nemohl se dostat k tahu ve strategii S_{II} což znamená, že první hráč mohl zvolit první tah x_0Ax_1 tak, že $xS_{II} = \emptyset$. Tedy $(x_0, x_1) \in A \cap r(S_{II}) = S_I$ a S_I je neprohrávající strategie prvního hráče. $\square$

8. Relace “hluboko pod”

V tomto oddíle se jen krátce zmíníme o jisté relaci odvozené z částečného uspořádání, která sehrála významnou roli v některých partiích teoretické informatiky.

8.1. Řekneme, že *x je hluboko pod y* v uspořádané množině $(X, \leq)$, a píšeme

$$x \ll y,$$

jestliže pro každou usměrněnou (viz 3.4) $D \subseteq X$ platí implikace

$$y \leq \sup D \quad \Rightarrow \quad \exists d \in D,\ x \leq d.$$

Příklady. (a) V lineárně uspořádaných množinách je $x \ll y$ právě když $x < y$ (viz (2’) v 2.1.1). To je nezajímavý případ a v aplikacích roli nehraje.

(b) Ve svazu $(\mathfrak{P}(X) \subseteq)$ je $A \ll B$ právě když A je konečná (s tím souvisí výraz “$A \subset\subset B$” někdy v litreatuře užívaný pro “A je konečná podmnožina B”).

(c) Abychom mohli uvést skutečně podstatný příklad, trochu předběhneme. Můžeme snad ale předpokládat, že se čtenář už dříve něco dozvěděl o metrických prostorech a že ví, že z každího pokrytí kompaktního prostoru otevřenými množinami lze vybrat konečné podpokrytí.

Vezměme svaz otevřených množin (uspořádaný inklusí). Buďte U, V otevřené množiny takové, že existuje kompaktné K takové, že $U \subseteq K \subseteq V$. Potom je $U \ll V$: Je-li $V \leq \bigcup D$ kde D je systém otevřených množin, existují $V_1, \ldots, V_n \in D$ takové, že $K \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_n$. Je-li D usměrněný, existuje $W \in D$ taková, že pro všechna i je $V_i \subseteq W$, takže $U \subseteq K \subseteq W$.

Zřejmě platí
8.1.1. Pozorování. *1. Je-li $x \ll y$, je $x \leq y$.*
2. Je-li $x \leq x' \ll y' \leq y$, je $x \ll y$.

8.2. Řekneme, že uspořádaná množina je *spojitá*, je-li

$$\forall x, \quad x = \bigvee \{y \mid y \ll x\},$$

a jsou-li všechny množiny $\{y \mid y \ll x\}$ usměrněné.

8.3. Tvrzení. *Ve spojité uspořádané množině je relace $\ll$ interpolativní. Navíc platí, že je-li $a_1, a_2 \ll b$, existuje prvek c takový, že (simultánně) $a_1, a_2 \ll c \ll b$.*

Důkaz. Buď $a \ll b$. Máme $b = \bigvee \{x \mid x \ll b\}$, a každý prvek $x \ll b$ můžeme vyjádřit podobně, takže je

$$b = \bigvee \{x \mid \exists y,\ x \ll y \ll b\}, \tag{$*$}$$

což je opět usměrněná množina (je-li $x_i \ll y_i \ll b$ je pro vhodné $y \ll b$, $y_1, y_2 \leq y$ a tedy $x_1, x_2 \ll y \ll$; z usměrněnosti množiny $\{x \mid x \ll y\}$ pak dostaneme x takové, že $x_i \ll x \ll y \ll b$). Jestliže jsou $a_i \ll b$, existují x_i a y_i takové, že $a_i \leq \ x_i \ll y_i \ll b$. Opět zvolme $c \ll b$ tak, aby $y_i \leq c$ a dostaneme $a_i \ll c \ll b$. $\square$

Čtenář si jistě všiml, že jednu úvahu jsme jakoby dělali dvakrát. Poprvé jsme se potřebovali ujistit, že množina v $(*)$ je vůbec usměrněná, abychom mohli použít definici relace $\ll$: ta totiž o obecných suprmech neříká nic.

8.3.1. Důsledek. *Je-li ve spojité uspřádané množině $(X, \leq)$ pro nějaké prvky $a \ll b$, je-li $D \subseteq X$ usměrněná, a je-li $b \leq \sup D$, existuje $d \in D$ takové, že $a \ll d$.*

8.4. V aplikacích často místo spojitých uspořádaných množin vystupují uspořádané množiny s trochu silnější vlastností.

Prvek $a \in (X, \leq)$ nazveme *kompaktním* je-li $a \ll a$.

Uspořádaná množina je *algebraická*, je-li její každý prvek usměrněným supremem kompaktních $y \leq x$. Jinak řečeno, v definici 8.2 je výraz $x = \bigvee\{y \mid y \ll x\}$ nahrazen výrazem $x = \bigvee\{y \mid y \ll y \leq x\}$.

Kapitola III

Svazy jako algebry

Na suprema $a \vee b$ či infima $a \wedge b$ v polosvazech a svazech se můžeme dívat jako na binární operace a v této kapitole budeme tomuto pohledu dávat přednost. Co se týče vnitřní struktury polosvazů a svazů dostaneme ekvivalentní popisy, které navíc otevírají řadu důležitých otázek. Je ovšem třeba si uvědomit, že při algebraickém pohledu se mění preference zobrazení: u uspořádaných množin bylo přirozené dávat přednost isotonním zobrazením, u algeber nás víc zajímají homomorfismy, t.j. zobrazení, která respektují operace (např., splňují rovnice $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ a pod.). Homomorfismů je samozřejmě méně.

1. $a \wedge b$ a $a \vee b$ jako binární operace

1.1. Z II.2.2 okamžitě vidíme, že platí

$$\begin{aligned} &a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c, \\ &a \wedge b = b \wedge a, \\ &a \wedge a = a. \end{aligned} \tag{$\wedge$-eq}$$

Má-li polosvaz největší prvek 1, platí dále

$$1 \wedge a = a. \tag{1-eq}$$

1.2. Rovnice ($\wedge$-eq) popisují strukturu polosvazu. Platí totiž

Věta. *Nechť je na množině X dána binární operace $\wedge$ splňující rovnice ($\wedge$-eq). Potom existuje právě jedno uspořádání v němž je $a \wedge b = \inf\{a, b\}$.*

X je polosvaz s jednotkou právě když v něm existuje prvek 1 splňující rovnici (1-eq).

Důkaz. Takové uspořádání je nejvýš jedno, protože musí být $x \leq y$ právě když $x = \inf\{x, y\}$. Definujme tedy

$$x \leq y \quad \equiv_{\mathrm{df}} \quad x \wedge y = x.$$

Tato relace je uspořádání: $x \leq x$ protože $x \wedge x = x$, je-li $x \leq y \leq z$ máme $x \wedge y = x$ a $y \wedge z = y$ a tedy $x \wedge z = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y = x$ a tedy $x \leq z$; konečně je-li $x \leq y \leq x$ je $x = x \wedge y = y \wedge x = y$.

V tomto uspořádání je $x \wedge y = \inf\{x, y\}$: především je to dolní mez množiny $\{x, y\}$, protože $(x \wedge y) \wedge x = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y$ a ještě bezprostředněji $(x \wedge y) \wedge y = x \wedge y$; je z dolních mezí největší, protože je-li $z \wedge x = z = z \wedge y$ máme $x \wedge (z \wedge y) = (z \wedge x) \wedge y = z \wedge y = z$ a tedy $z \leq x \wedge y$.

Je-li $1 \wedge a = a$ je v naší definici $a \leq 1$. $\square$

1.3. Je-li X svaz, máme kromě operace $\wedge$ další operaci $\vee$ splňující rovnice

$$\begin{aligned} &a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, \\ &a \vee b = b \vee a, \\ &a \vee a = a \end{aligned} \tag{$\vee$-eq}$$

a operace $\wedge$ a $\vee$ jsou svázány rovnicemi

$$a \wedge (a \vee b) = a, \quad a \vee (a \wedge b) = a. \tag{$\wedge\vee$-eq}$$

Platí

Věta. *Nechť jsou na množině X dány binární operace splňující rovnice ($\wedge$-eq), ($\vee$-eq) a ($\wedge\vee$-eq). Potom na X existuje právě jedno uspořádání $\leq$ takové, že $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ a $a \vee b = \sup\{a, b\}$.*

X je svaz s nulou a jednotkou právě když v něm existují prvky 0 a 1 splňující

$$0 \vee a = 1 \wedge a = a \text{ pro všechna } a.$$

Důkaz. Jako v začátku předchozího důkazu především vidíme, že uspořádání musí být určeno požadavkem $x \leq y$ právě když $x = \inf\{x, y\}$. Aplikací téhož na X^{op} vidíme, že ale též musí být $x \leq y$ právě když $y = \sup\{x, y\}$. Celá záležitost se tedy redukuje na otázku, zda tyto požadavky je možno sladit (potom už tvrzení plyne z předchozí věty aplikované na X a X^{op}). Jde tedy o to, zda definice

$$\begin{aligned} x \leq_1 y \quad &\text{právě když} \quad x \wedge y = x, \\ x \leq_2 y \quad &\text{právě když} \quad x \vee y = y \end{aligned}$$

dávají totéž uspořádání. Máme-li však $x \wedge y = x$, je $y = y \vee (x \wedge y) = y \vee x$, a je-li $y = y \vee x$ je $x = x \wedge (y \vee x) = x \wedge y$. $\square$

1.4. Budeme-li dále mluvit o *podsvazech* nebo *podpolosvazech*, máme na mysli podalgebry. Nestačí tedy, aby to byla podmnožina v níž je zachováno uspořádání. Musí být navíc také uzavřena na příslušná suprema a infima.

Poznámka. V II.5.1 jsme se setkali s tím, že ne každé zobrazení na dovolovalo (injektivní) vytvoření (správného) kvocientu; zde ani každé vložení (obecněji, prosté zobrazení) nedovolí projektivní vytváření (správného podobjektu). Tak je tomu u algeber běžně.

Na druhé straně, součiny svazů, polosvazů, atd., jsou algebry stejnného typu. I to je u algeber jev běžný, a dozvíme se o něm víc v příští kapitole.

2. Modulární a distributivní svazy

2.1. Řekneme, že svaz L je *modulární*, platí-li v něm implikace

$$a \leq c \quad \Rightarrow \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c.$$

2.1.1. Poznámka. Uvědomte si, že implikace

$$a \leq c \quad \Rightarrow \quad a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c.$$

platí vždy. V modularitě jde tedy o opačnou nerovnost.

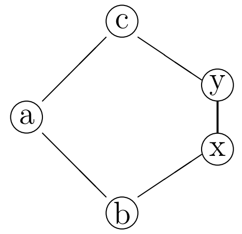
2.2. Modulární svazy hrají významnou roli v algebře i jinde, pro nás zde ale tento pojem hraje roli spíš pomocnou. Proto z mnoha zajímavých vlastností zde dokážeme jen následující charakteristiku.

Věta. *Svaz L je modulární právě když neobsahuje podsvaz isomorfní se svazem C_5 z obrázku 1.*
(Na obrázku jsou prvky uspořádány zdola nahoru po vyznačených cestách. Podobně v dalším.)

Důkaz. I. Nechť L obsahuje C_5. Potom (užíváme značení z obrázku) je

$$x \vee (a \wedge y) = x \vee b = x < y = c \wedge y = (x \vee a) \wedge y$$

třebaže $x \leq y$. Tedy L není modulární.



Obr. 1: C_5, konfigurace zakázaná v modulárním svazu.

II. Nechť L není modulární. Tedy existují u, v, w tak, že $u \leq w$ a $u \vee (v \wedge w) < (u \vee v) \wedge w$. Potom v nemůže být srovnatelné s $u \vee (v \wedge w)$ ani s $(u \vee v) \wedge w$ (kdyby bylo $v \leq (u \vee v) \wedge w$ bylo by $v \leq w$ a $u \vee (v \wedge w) = (u \vee v) \wedge w = u \vee v$; kdyby bylo $v \geq u \vee (v \wedge w)$, bylo by $v \geq u$ a tedy $u \vee (v \wedge w) = (u \vee v) \wedge w = v \wedge w$).

Máme $v \vee u \vee (v \wedge w) = v \vee u$ a jelikož ještě $(u \vee v) \wedge w \leq v \vee u$, je též $v \vee u \geq v \vee ((u \vee v) \wedge w)$. Podobně $v \wedge (u \vee (v \wedge w) = v \wedge (u \vee v) \wedge w = v \wedge w$. V L tedy dostaneme kopii C_5 položíme-li $a = v$, $b = v \wedge w$, $c = v \vee w$, $x = u \vee (v \wedge w)$ a $y = (u \vee v) \wedge w$. $\square$

2.3. Svaz je *distributivní* platí li v něm rovnice

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \tag{distr}$$

To velmi připomíná vztah mezi sčítáním a násobením jak ho znáte z aritmetiky. Analogie však nejde příliš daleko. Trochu překvapivě zde automaticky máme též distributivitu v opačném pořadí operací. Platí totiž

2.3.1. Věta. *Svaz L je distributivní právě když v něm platí rovnice*

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c). \tag{distr'}$$

Jinými slovy, L je distributivní právě když L^{op} je distributivní.

Důkaz. Platí-li (distr), máme $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = ((a \wedge (a \vee c)) \vee (b \wedge (a \vee c))) = a \vee (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$. Stejně dostaneme opačnou implikaci. $\square$

2.4. Jelikož při $a \leq c$ je $a \vee c = c$ vidíme okamžitě, že

každý distributivní svaz je modulární.

2.5. Lemma. *Modulární svaz je distributivní právě když v něm platí rovnost*

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c).$$

Poznámka. Nerovnost $(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\vee(b\wedge c) \leq (a\vee b)\wedge(a\vee c)\wedge(b\vee c)$. zřejmě platí vždy, jde tedy jen o opačnou nerovnost.

Důkaz. I. Je-li svaz distributivní, je $(a\vee b)\wedge(a\vee c)\wedge(b\vee c) = (a\vee(b\wedge(a\vee c)))\wedge(b\vee c) = (a\wedge(b\vee c))\vee(b\wedge(a\vee c)) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)\vee(b\wedge a)\vee(b\wedge c)$.

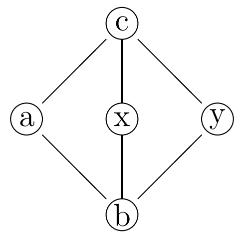
II. Nechť rovnice platí. Potom máme

$$(a\vee b)\wedge c = (a\vee b)\wedge(a\vee c)\wedge(b\vee c)\wedge c = ((a\wedge b)\vee((a\wedge c)\vee(b\wedge c))\wedge c.$$

Je-li svaz navíc modulární máme dále, protože $(a\wedge c)\vee(b\wedge c)\leq c$,

$$\cdots = (a\wedge c)\vee(b\wedge c)\vee(a\wedge b\wedge c) = (a\wedge c)\vee(b\wedge c). \qquad \square$$

2.6. Věta. *Svaz L je distributivní právě když neobsahuje podsvaz isomorfní se svazem C_5 z obrázku 1 ani podsvaz isomorfní se svazem D_3 z obrázku 2.*



Obr. 2: D_3, další konfigurace zakázaná v distributivním svazu.

Důkaz. I. Obsahuje-li L konfiguraci C_5 není ani modulární. Obsahuje-li D_3 je distributivita porušena nerovností $(a\wedge x)\vee(a\wedge y) = b \neq a = a\wedge c = a\wedge(x\vee y)$.

II. Nechť svaz není distributivní. Není-li modulární, obsahuje C_5. Buď tedy L modulární. Podle 2.5 existují $a,b,c\in L$ takové, že

$$d = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)\vee(b\wedge c) < h = (a\vee b)\wedge(a\vee c)\wedge(b\vee c).$$

Položme

$$\begin{aligned} u &= (a\vee(b\wedge c))\wedge(b\vee c),\\ v &= (b\vee(a\wedge c))\wedge(a\vee c),\\ w &= (c\vee(a\wedge b))\wedge(a\vee b). \end{aligned}$$

Dokážeme, že

$$u \wedge v = u \wedge w = v \wedge w = d \quad \text{a} \quad u \vee v = u \vee w = v \vee w = h. \qquad (*)$$

K tomu stačí dokázat jen to, že $u \wedge v = d$ (zbytek dostaneme permutací prvků a, b, c a záměnou $\wedge$ a $\vee$ kterou můžeme udělat proto, že z definice prvků u, v, w dostaneme pomocí modularity

$$\begin{aligned} u &= (a \wedge (b \vee c)) \vee (b \wedge c), \\ v &= (b \wedge (a \vee c)) \vee (a \wedge c), \\ w &= (c \wedge (a \vee b)) \vee (a \wedge b). \ ) \end{aligned}$$

Skutečně máme (užíváme opět modularity)

$$\begin{aligned} u \wedge v &= (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee (a \wedge c)) \wedge (a \vee c) = \\ &= (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee (a \wedge c)) = (a \wedge (b \vee (a \wedge c))) \vee (b \wedge c) = \\ &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c). \end{aligned}$$

Podle $(*)$, jelikož $d \neq h$, máme nyní D_3 representováno nesrovnatelnými prvky u, v, w, společným infimem dvojic d a společným supremem dvojic h. □

2.7. Věta. *Svaz L je distributivní právě když každá soustava rovnic tvaru*

$$\begin{aligned} a \wedge x &= b \\ a \vee x &= c \end{aligned}$$

má nejvýš jedno řešení.

Důkaz. I. Nechť je L distributivní a nechť

$$a \wedge x = b, \ a \vee x = c, \ a \wedge y = b \text{ a } a \vee y = c.$$

Potom $x = x \wedge (a \vee x) = x \wedge (a \vee y) = (x \wedge a) \vee (x \wedge y) = (y \wedge a) \vee (x \wedge y) = y \wedge (a \vee x) = y \wedge (a \vee y) = y$.

II. Nechť L není distributivní. Potom v kterékoli z konfigurací C_5 nebo D_3 jsou x i y řešení naší soustavy rovnic. □

3. Ideály a filtry v distributivních svazech

3.1. Analogicky s definicí, kterou asi znáte z teorie okruhů (dívejme se na chvíli na operaci $\vee$ jako na "sčítání" a na $\wedge$ jako na "násobení") definujeme *ideál* v distributivním svazu s nulou a jednotkou L jako podmnožinu $J \subseteq L$ takovou, že

$$\begin{aligned} &0 \in J, \\ &a, b \in J \ \Rightarrow \ a \vee b \in J, \\ &b \leq a \ \& \ a \in J \ \Rightarrow \ b \in J. \end{aligned} \tag{idl}$$

V analogii s definicí ideálů v okruzích čtenář asi očekával místo třetího požadavku požadavek

$$b \in L \ \& a \in J \ \Rightarrow \ a \wedge b \in J;$$

formule v (idl) je s tím ale ekvivalentní ($b \leq a$ jsou přesně ty prvky, které se dají napsat jako $b' \wedge a$ pro $b' \in L$) a snadněji se s ní pracuje.

Víme již také, že na rozdíl od okruhů je situace mezi operacemi $\vee$ a $\wedge$ symetrická. To ale není jediný důvod pro zavedení následujícího pojmu; motivace je bohatší, třeba okolí bodů v topologii (viz jednu z dalších kapitol) se chovají takovýmto způsobem. *Filtr* v L je definován jako podmnožina $F \subseteq L$ taková, že

$$\begin{aligned} &1 \in F, \\ &a, b \in F \ \Rightarrow \ a \wedge b \in F, \\ &b \geq a \ \& \ a \in F \ \Rightarrow \ b \in F. \end{aligned} \tag{fltr}$$

Řekneme, že ideál resp. filtr je *vlastní*, jestliže to není celý svaz L, tedy v případě ideálu jestliže $1 \notin J$, v případě filtru jestliže $0 \notin F$. Často se automaticky předpokládá, že ideál resp. filtr vlastní je.

3.2. *Prvoideál* resp. *prvofiltr* je vlastní ideál J resp. filtr F takový, že

$$\begin{aligned} &\text{kdykoli } a \wedge b \in J, \text{ máme } a \in J \text{ nebo } b \in J \\ &\text{resp. kdykoli } a \vee b \in F, \text{ máme } a \in F \text{ nebo } b \in F \end{aligned}$$

(srovnejte s odpovídající definicí v okruzích - viz IV.9).

Maximální ideál resp. filtr je vlastní ideál resp. filtr, který není obsažen v žádném větším ideálu resp. filtru. Často potřebujeme maximalitu vzhledem k nějaké speciálnější podmínce – viz třeba Birkhoffova věta dále.

3.3. Prvofiltry na L jsou v přirozeném vzájemně jednoznačném vztahu s homomorfismy (zachovávajícími 0 a 1)

$$h : L \to \mathbf{2},$$

kde $\mathbf{2}$ je dvouprvkový svaz $\{0 < 1\}$.

Skutečně: k prvofiltru $F \subseteq L$ přiřaďme zobrazení

$$h_F : L \to \mathbf{2} \quad \text{definované předpisem} \quad h_F(x) = \begin{cases} 0 \text{ jestliže } x \notin F, \\ 1 \text{ jestliže } x \in F. \end{cases}$$

Potom máme $h_F(a \wedge b) = 1$ právě když $a \wedge b \in F$ právě když $a \in F$ a $b \in F$ právě když $h_F(a) \wedge h_F(b) = 1$, a $h_F(a \vee b) = 1$ právě když $a \vee b \in F$ právě když $a \in F$ nebo $b \in F$ právě když $h_F(a) \vee h_F(b) = 1$; $h_F(0) = 0$ protože F je vlastní filtr, a $h_F(1) = 1$ protože $1 \in F$.

Na druhé straně k homomorfismu $h : L \to \mathbf{2}$ definujme $F_h \subseteq L$ předpisem

$$a \in F_h \quad \text{právě když} \quad h(a) = 1.$$

Potom $0 \notin F_h \ni 1$ a kdykoli $a, b \in F_h$ je $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b) = 1$ a tedy $a \wedge b \in F_h$; je-li $a \vee b \in F_h$, t.j., $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b) = 1$, nemůže být $h(a) = h(b) = 0$.

Konečně máme $a \in F_{h_F}$ právě když $h_F(a) = 1$ právě když $a \in F$, a $h_{F_h}(a) = 1$ právě když $a \in F_h$ právě když $h(a) = 1$.

Prvofiltry a příslušné homomorfismy do svazu $\mathbf{2}$ jsou v konstrukcích často vzájemně nahrazovány, podle toho, co je právě technicky výhodnější.

3.4. Lemma. *Nechť J je ideál a F filtr v L a nechť platí $J \cap F = \emptyset$. Potom existuje filtr $\overline{F} \supseteq F$ maximální vzhledem k podmínce $\overline{F} \cap J = \emptyset$ a tento $\overline{F}$ je prvofiltr.*

Důkaz. Buď $\mathcal{F}$ nějaká soustava filtrů obsahujících F a disjunktních s J, taková, že pro kterékoli dva $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ je buď $F_1 \subseteq F_2$ nebo $F_2 \subseteq F_1$. Potom je zřejmě $\bigcup \mathcal{F}$ filtr, stále ještě disjunktní s J. Podle Zornova lemmatu (ve variantě principu maximality, viz I.4.6) tedy maximální filtr $\overline{F}$ z první části tvrzení existuje. Jde o to, dokázat, že je to prvofiltr.

Buď $a \notin \overline{F}$, $b \notin \overline{F}$ a $a \vee b \in \overline{F}$. Definujme

$$G = \{x \mid x \vee b \in \overline{F}\}.$$

Jsou-li $x, y \in G$ máme $(x \wedge y) \vee b = (x \vee b) \wedge (y \vee b) \in \overline{F}$ a tedy $x \wedge y \in G$, je-li $z \geq x$ je $z \vee b \geq x \vee b \in \overline{F}$ a tedy $z \in G$. Tedy je G filtr a jelikož zřejmě $G \supseteq \overline{F}$ a $G \ni a \notin \overline{F}$, je to filtr ostře větší než $\overline{F}$ a tedy již nemůže být disjunktní s J. Zvolme $c_1 \in G \cap J$ (tedy speciálně $c_1 \vee b \in \overline{F}$) a definujme

$$H = \{x \mid x \vee c_1 \in \overline{F}\}.$$

Stejně jako nahoře, H je filtr a je ostře větší než $\overline{F}$, obsahuje totiž b. Musí tedy již obsahovat nějaký $c_2 \in J$. To je ale spor, měli bychom $c_1 \vee c_2 \in J \cap \overline{F}$. □

3.5. Věta. (Birkhoffova věta) *Nechť J je ideál a F filtr v L a nechť platí $J \cap F = \emptyset$. Potom existují prvofiltr $\overline{F} \supseteq F$ a prvoideál $\overline{J} \supseteq J$ takové, že $\overline{J} \cap \overline{F} = \emptyset$.*

Důkaz. Z lemmatu vezměme $\overline{F}$ a J a použijme podruhé toto lemma v duální podobě (t.j., záměnou ideálů a filtrů, a operací $\vee$ a $\wedge$) na tuto disjunktní dvojici). □

3.5.1. Poznámky. (1) Existenci maximálních filtrů z definice 3.2 (a prvofiltrů) obsahujících daný (vlastní) filtr dostaneme samozřejmě užitím ideálu $\downarrow 0$, podobně pro ideály.

(2) často se užívá následující důsledek věty 3.5:

Nechť (v distributivním svazu s nulou a jednotkou) $a \not\leq b$. Potom existuje prvofiltr F takový, že $b \notin F \ni a$.

(3) Použití Zornova lemmatu (ekvivalentního s axiomem výběru) bylo podstatné. Bez výběrového principu by věta neplatila.

4. Pseudokomplementy a komplementy

4.1. Buď L svaz s nulou, $a \in L$. Největší element x takový, že $x \wedge a = 0$, pokud existuje (což samozřejmě nemusí), nazýváme *pseudokomplementem* prvku a a obvykle označujeme

$$a^*.$$

Pseudokomplement je tedy určen (zřejmě jednoznačně) formulí

$$x \le a^* \quad \text{právě když} \quad x \wedge a = 0. \tag{psc}$$

Pseudokomplementární svaz je svaz (s nulou) jehož každý element má pseudokomplement.

Speciálně máme v pseudokomplementárním svazu

$$a \le 0^* \quad \text{právě když} \quad a \wedge 0 = 0 \;\; \text{t.j. vždy.}$$

Tedy pseokomplementární svaz má vždy nulu i jednotku a platí $0^* = 1$ a zřejmě též $1^* = 0$.

4.2. Z formule (psc) okamžitě dostáváme

Pozorování. *Zobrazení*

$$a \mapsto a^*$$

pseudokomplementárního svazu do sebe je antitonní.

4.3. Věta. *1.* $a \le a^{**}$.

2. $a^* = a^{***}$.

3. $a \wedge b = 0$ *právě když* $a^{**} \wedge b = 0$.

4. $(a \vee a^*)^* = 0$.

Důkaz. 1. Protože $a \wedge a^* = 0$ máme $a \le (a^*)^*$.

2. Z 1 okamžitě $a^* \le (a^*)^{**}$, z 1 a antitonie $a^* \ge (a^{**})^*$.

3. Z 2: $a \wedge b = 0$ právě když $b \le a^*$ právě když $b \le (a^{**})^*$ pravě když $a^{**} \wedge b = 0$.

4. $x \wedge (a \vee a^*) = 0$ právě když $x \wedge a = 0$ a $x \wedge a^* = 0$, t.j. $x \le a^*$ a $x \le a^{**}$, tedy $x \le a^* \wedge a^{**} = 0$. □

4.4. Věta. *V psudokomplementárním svazu platí formule*

$$(a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**}.$$

Důkaz. Triviálně $(a \wedge b)^{**} \le a^{**} \wedge b^{**}$. Na druhé straně máme podle 4.3.1, $a \wedge b \le (a \wedge b)^{**}$, tedy $a \wedge b \wedge (a \wedge b)^* = 0$ a podle 4.3.3 $a^{**} \wedge b \wedge (a \wedge b)^* = 0$ a znovu podle 4.3.3 $a^{**} \wedge b^{**} \wedge (a \wedge b)^* = 0$, a konečně $a^{**} \wedge b^{**} \le (a \wedge b)^{**}$. □

4.5. Věta. (DeMorganova formule) *Nechť v pseudokomplementárním svazu L existuje* $\sup_{j \in J} a_j$. *Potom existuje* $\inf_{j \in J} a_j^*$ *a platí*

$$(\sup_{j \in J} a_j)^* \;=\; \inf_{j \in J} a_j^*.$$

Důkaz. $y \leq (\sup x_j)^*$ právě když $y \wedge (\sup x_j) = 0$ právě když $\sup x_j \leq y^*$ právě když pro všechna j, $x_j \leq y^*$ právě když pro všechna j, $x_j \wedge y = 0$ právě když pro všechna j, $y \leq x_j^*$. $\square$

4.6. Poznámky. 1. Pseudokomplement v pseudokomplementárním svazu je případ Galoisovy (samo)adjunkce: z ekvivalencí $y \leq x^* \Leftrightarrow x \wedge y = 0 \Leftrightarrow x \leq y^*$ dostaneme

$$x^* \leq^{\mathrm{op}} y \quad \text{právě když} \quad x \leq y^*;$$

tedy je $(x \mapsto x^*) : (X, \leq) \to (X, \leq)^{\mathrm{op}}$ levý adjunkt k $(x \mapsto x^*) : (X, \leq)^{\mathrm{op}} \to (X, \leq)$. Odtud Věta 4.5 okamžitě plyne (vzpomeňte si na II.6). Srovnejte též 4.3.1 s II.6.4.

2. Pseudokomplementární svaz nemusí být distributivni. Větu 4.5 však můžeme chápat jako jakousi "slabou distributivitu". Můžeme ji přepsat do tvaru

$$(\bigvee x_j) \wedge y = 0 \quad \text{právě když} \quad \bigvee (x_j \wedge y) = 0.$$

4.7. Prvek b nazveme *komplementem* prvku a ve svazu L, platí-li

$$a \wedge b = 0 \quad \text{a} \quad a \vee b = 1.$$

Komplement samozřejmě nemusí existovat. A ani nemusí být jednoznačně určen: viz prvky x, y, komplementy a v (dokonce modulárním) svazu D_3 z 2.6. Podle věty 2.7 ale máme

4.7.1. Pozorování. *V distributivním svazu má každý prvek nejvýš jeden komplement.*

4.8. Pseudokomplementy nemusí být komplementy. Platí ale aspoň

Věta. *1. V pseudokomplementárním svazu je* $(a \vee a^*)^{**} = 1$.
2. V distributivním svazu je každý komplement pseudokomplement.
Důkaz. 1 Plyne okamžitě z 4.3.4.

2. Je-li b komplement a a $x \wedge a = 0$ máme $x = x \wedge (a \vee b) = (x \wedge a) \vee (x \wedge b) = x \wedge b$ a tedy $x \leq b$. $\square$

4.9. Z věty 2.7 také okamžitě dostáváme

Pozorování. *Nechť L, M jsou svazy s nulou a jednotkou, $h : L \to M$ homomorfismus zachovávající 0 a 1. Nechť svaz M je distributivní. Potom h zachovává komplementy.*

Homomorfismy mezi pseudokomplementárními svazy ale nemusí zachovávat pseudokomplementy. Platí jen zřejmá nerovnost

$$f(a^*) \leq f(a)^*.$$

5. Heytingovy algebry

5.1. *Heytingova operace* ve svazu L je binární operace $a \to b$ splňující požadavek

$$a \wedge b \leq c \quad \text{právě když} \quad a \leq b \to c. \tag{Hey}$$

Svazu s nulou a jednotkou a Heytingovou operací (to, že má jednotku je ale automatické, jelikož $x \wedge a \leq a$ je vždy $x \leq a \to a$)říkáme *Heytingova algebra.*

Z formule (Hey) okamžitě vidíme, že

$$c_1 \leq c_2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} b \to c_1 \leq b \to c_2, \\ c_1 \to b \geq c_2 \to b. \end{cases} \tag{1.1}$$

5.2. Pro každé pevné b dává formule (1.1) adjunkci $x \wedge b \leq y \;\equiv\; x \leq b \to y$ mezi zobrazeními $(x \mapsto x \wedge b)$ a $(x \mapsto b \to y]$ svazu L do sebe. Jelikož první z těchto zobrazení je dáno svazovou strukturou, je jím určeno i druhé, a tím máme určenu i operaci $\to$. Tedy:

5.2.1 *Strukturu svazu můžeme rozšířit na Heytingovskou nejvýše jedním způsobem.*

5.2.2 Z II.6.6 dostaneme okamžitě tuto nutnou podmínku:

Připouští-li svaz Heytingovu operaci, platí v něm

$$(\sup M) \wedge x = \sup\{m \wedge x \;| m \in M\}$$

kdykoli $\sup M$ *existuje.*

Speciálně:

Heytingova algebra je vždy distributivní.

5.2.3 V případě úplného svazu dostáváme dokonce nutnou a postačující podmínku:

Úplný svaz L připouští Heytingovu operaci právě když v něm platí zesílená rovnice distributivity

$$(\bigvee_{j\in J} a_j) \wedge b = \bigvee_{j\in J}(a_j \wedge b) \tag{frm}$$

pro každý systém $\{a_j \mid j \in J\} \subseteq L$ a každé $b \in L$.

5.2.4 *Heytingova algebra je vždy pseudokomplementární. Máme totiž $a^* = a \to 0$.*

O tom trochu více dále v 5.9.

5.3. Poznámka. Vzhledem k jednoznačnosti Heytingovy operace jsou tedy mezi úplnými svazy Heytingovy algebry totéž jako svazy splňující distributivní pravidlo (frm) z 5.2.3. Pohled na věc se však změní, ptáme-li se na privilegovaná zobrazení. U svazů to budou ta, která zachovávají $0, 1, \wedge$ a $\vee$, u Heytingových algeber budeme navíc požadovat aby $h(a \to b) = h(a) \to h(b)$. Další, a zvlášť významný, je výběr zobrazení zachovávajících všechna suprema a konečná infima. Takové homomorfismy jsou základním pojmem t.zv. bezbodové topologie; zmíníme se o nich později.

Pro obecný svazový homomorfismus mezi Heytingovými algebrami platí

$$h(a \to b) \leq h(a) \to h(b)$$

(protože ze zřejmé nerovnosti $(a \to b) \wedge a \leq b$ dostaneme $h(a \to b) \wedge h(a) \leq h(b)$).

5.4. Další pozorování kolem adjunkce. Především, jelikož $x \mapsto (a \to x)$ je pravý adjunkt, máme

$$a \to \inf_{j\in J} b_j = \inf_{j\in J}(a \to b_j) \tag{5.4.1}$$

kdykoli infimum na levé straně existuje.

Všimněme si dále, že že z formule (Hey) dostáváme též

$$a \leq b \to c \quad \equiv \quad a \wedge b \leq c \quad \equiv \quad b \leq a \to c,$$

takže zde ještě máme adjunkce

$$x \to c \leq^{\mathrm{op}} y \quad \text{právě když} \quad x \leq y \to c. \tag{5.4.2}$$

Tedy,

pro každé c je zobrazení $(x \mapsto (x \to c)) : L \to L^{op}$ levý adjunkt k zobrazení $(x \mapsto (x \to c)) : L^{op} \to L$

a máme

$$(\sup_{j \in J} a_j) \to c = \inf_{j \in J} (a_j \to c). \tag{5.4.3}$$

5.5. Z věty II.6.4 (a samozřejmě též snadno přímo) dostáváme též nerovnosti

$$a \wedge (a \to b) \leq b, \tag{5.5.1}$$

$$a \leq b \to (a \wedge b) \tag{5.5.2}$$

a víme, že tato dvojice nerovností je ekvivalentní s (Hey).

5.6. Několik dalších bezprostředních formulí.

Z $a \wedge b \leq a$ dostáváme

$$a \leq b \to a. \tag{5.6.1}$$

Jelikož $1 = a \to b$ právě když $1 \leq a \to b$ máme

$$a \leq b \quad \text{právě když} \quad a \to b = 1. \tag{5.6.2}$$

Dále, $1 \to a \leq 1 \to a$ a tedy $1 \to a = (1 \to a) \wedge 1 \leq a$, což spolu s (5.6.1) dává

$$1 \to a = a. \tag{5.6.3}$$

Operace $\wedge$ je asociativní a tedy $x \leq (a \wedge b) \to c$ právě když $x \wedge a \wedge b \leq c$ právě když $x \wedge a \leq b \to c$ právě když $x \leq a \to (b \to c)$. Odtud

$$(a \wedge b) \to c = a \to (b \to c) = b \to (a \to c). \tag{5.6.4}$$

5.7. Tři jednoduché důsledky.

Podle (5.1) a (6.1) máme $a \wedge (a \to b) \leq a \wedge b \leq a \wedge (a \to b)$ takže

$$a \wedge (a \to b) = a \wedge b. \tag{5.7.1}$$

Z toho dále $a \to b \leq a \to (a \wedge b)$ což spolu s (1.1) dává

$$a \to b = a \to (a \wedge b). \tag{5.7.2}$$

Z (7.1) a (7.2) pak okamžitě usoudíme, že

$$a \wedge b = a \wedge c \quad \text{právě když} \quad a \to b = a \to c. \tag{5.7.3}$$

5.8. Jen o málo složitější je formule

$$x = (x \vee a) \wedge (a \to x) \tag{5.8.1}$$

(podle (6.1), $x \leq (x \vee a) \wedge (a \to x)$; podle (5.2) je $(x \vee a) \wedge (a \to x) = (x \wedge (a \to x)) \vee (a \wedge (a \to x) \leq x)$.)

5.9. Poznámka o logice. Heytingova algebra je v podobném vztahu k t.zv. intuicionistické (Brouwerovské) logice (zhruba řečeno, logice bez "pravidla o vyloučeném třetím") jako je Booleova algebra (o té bude budeme mluvit v příštím odstavci, ale definici čtenář již jistě někde viděl) k logice klasické. Podívejme se nyní na to, jak málo musíme předpokládat, abychom již měli logiku, která se jen trochu (i když přece jen významně) liší od klasické logiky.

Mezi výroky v nějaké teorii uvažujme relaci $A \vdash B$ ("z A plyne B"). To je sice jen předuspořádání, ne uspořádání, ale víme již, že na tom příliš nezáleží. Disjunkce $A\&B$ je infimum v $\vdash$, a konjunkce je supremum.

Mějme nyní spojku $A \Rightarrow B$ o které požadujeme vyvozovací pravidlo (t.zv. "modus ponens")

$$A\&(A \Rightarrow B) \vdash B,$$

(platí-li A a implikace $A \Rightarrow B$, platí B) a navíc

$$A \vdash B \to (A\&B)$$

("platí-li A platí pro každé B implikace $A \Rightarrow (A\&B)$" – o implikaci můžeme těžko požadovat méně) dostáváme podle 5.5 Heytingovskou strukturu, takže např. konjunkce distribuuje přes libovolné disjunkce. Zejména ale máme pseudokomplement A^*, který sice nemusí splňovat rovnici $A = A^{**}$, ale aspoň $A^* = A^{***}$, to jest B je rovna své dvojí negaci jakmile je vůbec negací nějakého výroku. Podobně konjunkce $A \vee A^*$ nemusí vždy být 1, ale v rámci těch výroků, které jsou negacemi jiných, supremum A a A^* už jednotka je. O tom více dále v 6.6.

5.10. Heytingova operace jako relativní pseudokomplement. Z $x \wedge (x \to a) \leq a$ (viz (5.1)) dostáváme

$$x \leq (x \to a) \to a \tag{5.10.1}$$

a z (6.1) pak

$$(x \to a) \wedge ((x \to a) \to a) = a. \tag{5.10.2}$$

Z (10.1) a antitonie v (1.1) podobně jako v 4.3 dostaneme

$$((x \to a) \to a) \to a) = x \to a. \tag{5.10.3}$$

Je-li $x \vee (x \to a) \leq (y \to a)$ je $x \to a \leq y \to a$ a tedy $y \wedge (x \to a) \leq a$ a na druhé straně $x \leq y \to a$ a tedy $y \leq x \to a$ a konečně $y = y \wedge y \leq a$. Tedy

$$\text{je-li } x \vee (x \to a) \leq y \to a \text{ je } y \leq a \text{ a proto } y \to a = 1. \tag{5.10.4}$$

Buď nyní $S \subseteq L$ taková podmnožina, že je Heytingovou algebrou se stejnou operací $\to$ jako L sama, a s nejmenším prvkem a. Potom formule $x^{*a} = x \to a$ dává pseudokomplement v S a formule nahoře dávají standardní $x \leq x^{*a*a}$ a $x^{*a} = x^{*a*a*a}$. Formule (5.10.4) pak říká, že jediný "negovaný" prvek nad $x \vee x^{*a}$ je 1.

6. Booleovy algebry

6.1. *Booleova algebra* je distributivní svaz takový, že každý prvek v něm má komplement. Komplement prvku a budeme označovat

$$a^{\mathsf{c}}.$$

V definici komplementu je symetrická role nuly a jednotky, a operací $\vee$ a $\wedge$. Máme tedy

6.1.1. Pozorování. *Je-li L Booleova algebra, je i L^{op} Booleova algebra.*

6.2. Věta. *Každá Booleova algebra L je Heytingova algebra. Formule*

$$b \to c = b^{\mathsf{c}} \vee c$$

totiž dává Heytingovu operaci v L.

Důkaz. Je-li $a \leq b^{\mathsf{c}} \vee c$ je $a \wedge b = (b^{\mathsf{c}} \vee c) \wedge b = 0 \vee c \wedge b \leq c$; je-li $a \wedge b \leq c$ je $a = a \wedge (b^{\mathsf{c}} \vee b) \leq (a \wedge b^{\mathsf{c}}) \vee c \leq b^{\mathsf{c}} \vee c$. $\square$

Poznámka. Taková formule dává ze všech pseudokomplementárních svazů Heytingovu operaci jen v Booleových algebrách. Kdyby totiž bylo obecně $a \to b = a^* \vee b$, bylo by speciálně $1 = a \to a = a^* \vee a$ a a^* by byl komplement. Ale z úvahy v důkazu vidíme, že

> *v každém distributivním svazu, má-li b komplement b^{c} máme adjunkci*
>
> $$x \wedge b \leq y \quad \textit{právě když} \quad x \leq b^{\mathsf{c}} \vee y,$$
>
> *takže jakmile má v Heytingově algebře nějaký element b komplement, je pro něj, a pro libovolné c, vždy $b \to c = b^{\mathsf{c}} \vee c$.*

Obecně pak platí

$$b^* \vee c \leq b \to c,$$

protože $(b^* \vee c) \wedge b \leq b \wedge c \leq c$.

6.3. Důsledek. *V Booleově algebře L platí*

$$(\sup A) \wedge b = \sup\{a \wedge b \mid a \in A\}$$

kdykoli má pro $A \subseteq L$ levá strana smysl. Speciálně tedy v úplné Booleově algebře platí zesílená distributivita (frm) z 5.2.3

$$(\bigvee_{j \in J} a_j) \wedge b = \bigvee_{j \in J} (a_j \wedge b)$$

a jelikož je pak i L^{op} úplná Booleova algebra, také

$$(\bigwedge_{j \in J} a_j) \vee b = \bigwedge_{j \in J} (a_j \vee b).$$

6.4. De Morganovy formule. Zobrazení $h = (a \mapsto a^{\mathsf{c}}) : L \to L$ je antitonní a platí $h(h(a)) = a$, takže je to isomorfismus mezi L a L^{op}. Podle II.6.6 tedy máme

$$(\bigvee_{j\in J} a_j)^{\mathsf{c}} = \bigwedge_{j\in J} a_j^{\mathsf{c}} \quad \text{i} \quad (\bigwedge_{j\in J} a_j)^{\mathsf{c}} = \bigvee_{j\in J} a_j^{\mathsf{c}}.$$

Všimněte si, že jsme k tomu nepotřebovali distributivitu.

6.5. Ultrafiltry. V Booleových algebrách jsou všechny prvofiltry a prvoideály maximální. Platí

Věta. *Buď F vlastní filtr v Booleově algebře L. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentni.*

1. *F je maximální filtr,*
2. *F je prvofiltr,*
3. *pro každé $a \in L$ je buď $a \in F$ nebo $a^{\mathsf{c}} \in F$.*

Důkaz. (1)⇒(2) je již implicite v 3.4, ale dokažme to přímo. Je-li F maximální vlastní filtr, $a \vee b \in F$ a $a \notin F$, definujme $G = \{x \mid x \vee b \in F\}$. Potom je G filtr a je zřejmě ostře větší než F (neboť $a \in G \setminus F$); tedy není vlastní, tedy $0 \in G$ a konečně $b = 0 \vee b \in G$.

(2)⇒(3) plyne z toho, že $a \vee a^{\mathsf{c}} = 1 \in F$.

(3)⇒(1): Buď $F \subsetneq G$ pro nějaký filtr G. Zvolme $a \in G \setminus F$. Jelikož $a \notin F$ musí být $a^{\mathsf{c}} \in F \subseteq G$, tedy $a, a^{\mathsf{c}} \in G$ a konečně $0 = a \wedge a^{\mathsf{c}} \in G$. Filtr G tedy není vlastní. $\square$

Pro prvofiltry (≡ maximální filtry) v Booleových algebrách se užívá termín *ultrafiltry.*

6.6. Booleanizace. Buď L Heytingova algebra. Položme

$$\mathfrak{B}L = \{a \in L \mid a = a^{**}\}$$

a definujme zobrazení

$$\mathfrak{b} : L \to \mathfrak{B}L$$

předpisem $\mathfrak{b}(a) = a^{**}$.

Věta. *$\mathfrak{B}L$ je Booleova algebra. Konečná infima v $\mathfrak{B}L$ se shodují s konečnými infimy v L, a pro suprema platí formule*

$$\sup_{\mathfrak{B}L} M = (\sup_L M)^{**}$$

kdykoli má pravá strana smysl. Je-li tedy L úplný svaz, je i svaz $\mathfrak{B}L$ úplný.

Zobrazení $\mathfrak{b}$ zachovává konečná infima a všechna existující suprema. Navíc o něm platí implikace $\mathfrak{b}(a) = 0 \;\Rightarrow\; a = 0$.

(Poslední implikace je ovšem triviální. Hraje ale významnou úlohu – jedná se o t.zv. *hustotu* homomorfismu mezi distributivními svazy.)

Důkaz. Nechť $M \subseteq L$ má supremum s. Potom je s^{**} v $\mathfrak{B}L$ a kdykoli $a \in \mathfrak{B}L$ je takový, že pro všechna $m \in M$ je $a \geq m$, je $a \geq s$ a tedy $a = a^{**} \geq s^{**}$. Máme $1 \leq 1^{**}$. Pro $a, b \in \mathfrak{B}L$, $a \wedge b = a^{**} \wedge b^{**} \geq (a \wedge b)^{**} \geq a \wedge b$.

Pro zobrazení $\mathfrak{b}$ máme $\mathfrak{b}(1) = 1$ a podle 4.4 $\mathfrak{b}(a \wedge b) = \mathfrak{b}(a) \wedge \mathfrak{b}(b)$.Tedy $\mathfrak{b}$ zachovává konečná infima.

Je-li $b \in \mathfrak{B}L$ je $a \leq b$ právě když $a^{**} \leq b$. Tedy, označíme-li $\iota : \mathfrak{B}L \subseteq L$ zobrazení vložení, vidíme, že máme adjunkci

$$\mathfrak{b}(a) \leq b \quad \text{právě když} \quad a \leq \iota(b)$$

a proto $\mathfrak{b}$ jako levý adjunkt zachovává všechna existující suprema.

O $\mathfrak{B}L$ jsme dosud nedokázali, že je distributivní. To můžeme udělat teď. Jsou-li $a, b, c \in \mathfrak{B}L$ je $a = \mathfrak{b}(a), b = \mathfrak{b}(b)$ a $c = \mathfrak{b}(c)$ a tedy

$$\begin{aligned}(a \vee_{\mathfrak{B}L} b) \wedge_{\mathfrak{B}L} c = (\mathfrak{b}(a) \vee_{\mathfrak{B}L} \mathfrak{b}(b)) \wedge_{\mathfrak{B}L} \mathfrak{b}(c)) = \\ = \mathfrak{b}((a \vee b) \wedge c) = \mathfrak{b}((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) = \\ = (\mathfrak{b}(a) \wedge_{\mathfrak{B}L} \mathfrak{b}(c)) \vee_{\mathfrak{B}L} (\mathfrak{b}(b) \wedge_{\mathfrak{B}L} \mathfrak{b}(c))) = (a \wedge_{\mathfrak{B}L} c) \vee_{\mathfrak{B}L} (b \wedge_{\mathfrak{B}L} c)\end{aligned}$$

(že homomorfismy na zachovávají všechny rovnice je ovšem známý fakt z obecné algebry; protože jsme o tom ale ještě nemluvili, provedli jsme výpočet podrobně).

Konečně podle 4.3.4 máme

$$a \vee_{\mathfrak{B}L} a^* = (a \vee a^*)^{**} = 1,$$

takže jsou a^* v $\mathfrak{B}L$ komplementy. $\square$

Konstrukci $\mathfrak{b} : L \to \mathfrak{B}L$, někdy prostě jen Boolově algebře $\mathfrak{B}L$, se říká *Booleanisace* Heytingovy algebry L.

6.7. Poznámky. 1. Distributivitu v Booleových algebrách potřebujeme např. kvůli jednoznačnosti komplementu (viz 2.7). Byla též nezbytná pro ověření, že $b^c \vee c$ byla Heytingovská operace. Všimněte si, že z tohoto faktu dostáváme v Booleovských algebrách použitím konečné silnější distributivity jako v 5.2.3, a duální k této.

2. Čtenář se jistě již setkal se svazy, které měly cosi jako kanonický komplement, a nebyly distributivní. Tak například ve svazu vektorových podprostorů vektorového prostoru V konečné dimense takovou roli hraje orthogonální doplněk, pro který platí $W \cap W^\perp = \{0\}$ i $W \vee W^\perp = V$ (přitom, samozřejmě, $W \cap W' = \{0\}$ i $W \vee W' = V$ může platit pro mnoho dalších podprostorů $W' \subseteq V$). – De Morganovy formule ovšem platí i v takových případech.

3. Booleanizaci lze tímto způsobem konstruovat již na polosvazu s 0 a pseudokomplementem splňujícím podmínku $x \wedge a = 0 \;\Leftrightarrow\; x \leq a^*$. Pravidla $a \leq a^{**}$, $a^* = a^{***}$ a $(a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**}$ se odvodí stejně jako dříve, stejně se definuje i $\mathfrak{B}L$. Snadno se zjistí, že $a \sqcup b = (a^* \wedge b^*)^*$ je supremum v $\mathfrak{B}L$, a že $a \to b = (a \wedge b^*)^*$ je tam Heytingovskou operací, takže je získaný svaz distributivní. Zbytek je už zřejmý.

7. Úplná distributivita

7.1. Z 2.3.1 si pamatujeme, že podmínky distributivity

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \quad \text{a} \quad (a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

jsou ve svazech ekvivalentní.

V úplných Booleových algebrách platí silnější

$$(\bigvee a_j) \wedge b = \bigvee (a_j \wedge b) \quad \text{a zároveň} \quad (\bigwedge a_j) \vee b = \bigwedge (a_j \vee b).$$

Tyto dvě podmínky obecně ekvivalentní nejsou. Vezměme třeba za L svaz všech otevřených podmnožin na reálné přímce. Protože suprema jsou zde sjednocení a konečná infima průniky, je zde zřejmě splněna první z podmínek. Vezmeme-li ale za a_n otevřené intervaly $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ a $b = \mathbb{R}$, máme $\bigwedge a_n = \emptyset$ a tedy $(\bigwedge a_j) \vee b = b$ zatím co $\bigwedge (a_j \vee b) = \mathbb{R}$.

7.2. Řekneme, že svaz je *úplně distributivní* platí-li v něm pro každý systém a_{ij}, $i \in I$, $j \in J_i$ rovnice

$$\bigvee_{i\in I}(\bigwedge_{j\in J_i} a_{ij}) = \bigwedge_{\phi\in\prod J_i}(\bigvee_{i\in I} a_{i,\phi(i)}), \tag{cdistr}$$

kde prvky produktu $\prod J_i$ píšeme jako $(\phi(i))_i$. To je splněno např ve svazu $\mathfrak{P}(X)$ všech podmnožin množiny X. Ukážeme, že na rozdíl od (frm) je tato rovnost ekvivalentní s rovností v níž nahradíme suprema infimy a naopak.

7.3. Lemma. *Položme $\Phi = \prod J_i$. Buď $\psi : \Phi \to I$ libovolné zobrazení. Potom existuje $i = i_\psi$ takové, že pro každé $j \in J_i$ existuje $\phi \in \Phi$ pro které je $\psi(\phi) = i$ a $\phi(i) = j$.*

Důkaz. Kdyby ne, existovalo by pro každé $i \in I$ nějaké $\alpha(i) \in J_i$ takové, že pro $\phi \in \Phi$ pro které $\psi(\phi) = i$ je $\phi(i) \neq \alpha(i)$. Potom by ale pro $\phi = \alpha$ a $i_0 = \psi(\alpha)$ bylo $\alpha(i_0) \neq \alpha(i_0)$. $\square$

7.4. Věta. *Rovnice (cdistr) platí v úplném svazu právě když platí*

$$\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i} a_{ij}) = \bigvee_{\phi\in\prod J_i}(\bigwedge_{i\in I} a_{i,\phi(i)}).$$

Důkaz. Dokážeme, že tato rovnost plyne z (cdistr), druhá implikace se odvodí podobně.

Nerovnost $\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i} a_{ij}) \geq \bigvee_{\phi\in\prod J_i}(\bigwedge_{i\in I} a_{i,\phi(i)})$ je zřejmá, protože pro každé ϕ máme $\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i} a_{ij}) \geq (\bigwedge_{i\in I} a_{i,\phi(i)})$.

Jde tedy o opačnou nerovnost. Položme nejprve pro $\phi \in \Phi$ a $i \in I$, $b_{\phi i} = a_{i\phi(i)}$. Potom podle (cdistr)

$$\bigvee_{\phi\in\prod J_i}(\bigwedge_{i\in I} a_{i,\phi(i)}) = \bigvee_{\phi\in\prod J_i}(\bigwedge_{i\in I} b_{\phi,i}) = \bigwedge_{\psi\in I^\Phi}(\bigvee_{\phi\in\Phi} b_{\phi,\psi(\phi)}).$$

Podle lemmatu máme pro každé $\psi : \Phi \to I$ index $i = i_\psi$ takový, že pro každé $j \in J_i$ je $b_{\phi,\psi(\phi)} = b_{\phi,i} = a_{i\phi(i)} = a_{ij}$ pro nějaké ϕ, takže je $\bigvee_{j\in J_{i_\psi}} a_{i_\psi j} \leq \bigvee_{\phi\in\Phi} b_{\phi,\psi(\phi)}$; tedy také $\bigwedge_{\psi\in I^\Phi}(\bigvee_{\phi\in\Phi} b_{\phi,\psi(\phi)}) \geq \bigwedge_{i\in J}(\bigvee_{j\in J_i} a_{ij})$.

Kapitola IV

Základní pojmy universální algebry

1. Algebraické operace

1.1. *n-ární operací* na množině X rozumíme zobrazení

$$\alpha : X^n = \overbrace{X \times \cdots \times X}^{n \text{ krát}} \to X.$$

Obecněji, je-li M pevná množina, *M-ární operace* na X je zobrazení

$$\alpha : X^M \to X.$$

Ve speciálních případech $n = 0, 1, 2, 3$ mluvíme o *nulárních, unárních, binárních* a *ternárních* operacích.

Jelikož $X^0 = \{\emptyset\}$ je jednoprvková množina, nulární operace je dána hodnotou $\alpha(\emptyset)$. Jako takové pevně dané hodnoty je obvykle nahlížíme, a často o nich mluvíme jako o *konstantách.*

Poznámka. Čtenář se asi zatím v praxi setkával nejčastěji s operacemi binárními (sčítání či násobení čísel, sčítání vektorů, průniky nebo sjednocení – obecněji průseky a spojení ve svazech), unárními (přiřazení čísla $-x$ k x, prvku x^{-1} k x v grupě, násobení pevným reálným číslem ve vektorovém prostoru, komplement v Boolově algebře) a nulárními (různé "neutrální prvky" při jiných operacích – nula, jednotka, nulový vektor). Užitečnost obecnějšího pohledu je vidět u operací, které se sice dají konstruovat z jiných (barycentr trojúhelníka jako funkce jeho vrcholů, aritmetické či geometrické průměry větších skupin čísel), ale mají svoji vlastní interpretaci. To však pro uvažování operací s většími počty argumentů není jediný a ani hlavní důvod.

1.2. Velmi důležité, i když triviální, operace jsou *projekce*

$$p_j = ((x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j) : X^n \to X.$$

Kromě jiného, spolu s obecnějšími zužováními a přehazováními proměnných hrají velmi podstanou roli při vytváření odvozených operací.

1.3. Zobrazení $f : X \to Y$ nazýváme *homomorfismem* vzhledem k operacím $\alpha : X^M \to X$, $\beta : Y^M \to Y$, platí-li pro každé $\xi : M \to X$

$$f(\alpha(\xi)) = \beta(f \cdot \xi), \tag{hom}$$

možná ne úplně průzračná formule. Podívejme se ale co říká ve finitárním případě:

$$f(\alpha(x_1, \dots, x_n)) = \beta(f(x_1), \dots, f(x_n)),$$

což je jistě jasnější. A jestliže užíváme třeba pro binární operace psaní $\Box(x, y) = x\Box y$, máme běžnou formuli $f(x\Box y) = f(x)\Box f(y)$.

Pro nulární operace (pevné $a \in X$ a $b \in Y$ dostáváme požadavek, aby $f(a) = b$.

> **Poznámka.** Užití termínu "homomorfismus" je ve shodě s jeho užitím dříve – viz 1.4 dále).

Podobně jako u jiných definic speciálních zobrazení řekneme, že homomorfismus f vzhledem k α, β je *isomorfismus*, existuje-li homomorfismus g vzhledem k β, α takový, že $fg = \mathrm{id}_Y$ a $gf = \mathrm{id}_X$ a homomorfismus $f : X \to X$ vzhledem k α, α se nazývá *endomorfismus*, a je-li to isomorfismus, mluvíme o *automorfismu*.

Zcela zřejmé je to, že

> *identické zobrazení je automorfismus vzhledem k jakékoli operaci; je-li f homomorfismus vzhledem k α, β a g homomorfismus vzhledem k β, γ, je složení gf homomorfismus vzhledem k α, γ.*

I následující dvě tvrzení jsou velmi jednoduchá:

1.3.1. Tvrzení. *Buďte α, β, γ po řadě M-ární operace na množinách X, Y, Z. Buď $f : X \to Y$ prosté zobrazení, $g : Z \to Y$ libovolné zobrazení a $h : Z \to X$ zobrazení takové, že $f \cdot h = g$. Jsou-li f a g homomorfismy, je i h homomorfismus.*

Důkaz. Máme $f(h(\gamma(\xi))) = g(\gamma(\xi)) = \gamma(g \cdot \xi) = \gamma(f \cdot h \cdot \xi)$ a $f(\alpha(h \cdot \xi)) = \gamma(f \cdot h \cdot \xi)$. Jelikož f je prosté, $h(\gamma(\xi)) = \alpha(h \cdot \xi)$. $\Box$

1.3.2. Tvrzení. *Buďte α, β, γ po řadě M-ární operace na množinách X, Y, Z. Buď $f : X \to Y$ zobrazení na, $g : X \to Z$ libovolné zobrazení a $h : Y \to Z$ zobrazení takové, že $h \cdot f = g$. Jsou-li f a g homomorfismy, je i h homomorfismus.*

Důkaz. Zvolme $v : Y \to X$ takové, že $fv = \mathrm{id}$ (t.j., pro každé $y \in Y$ zvolme $x = v(y)$ tak, aby $f(x) = y$). Pro $\xi : M \to Y$ máme

$$\begin{aligned} h(\beta(\xi)) &= h(\beta(f \cdot v \cdot \xi)) = h(f(\alpha(v \cdot \xi))) \\ &= g(\alpha(v \cdot \xi)) = \gamma(g \cdot v \cdot \xi) = \gamma(h \cdot f \cdot v \cdot \xi) = \gamma(h \cdot \xi). \quad \square \end{aligned}$$

Poznámka. Zjednodušili jsme si práci užitím axiomu výběru (zobrazení v !). V případě infinitárních operací se bez toho neobejdeme, u n-árních operací s konečným n ale axiom výběru nepotřebujeme. Pro $y_1, \dots, y_n$ v Y zvolíme $x_i \in X$ tak, aby $f(x_i) = y_i$ a dostaneme

$$\begin{aligned} h(\beta(y_1, \dots, y_n)) &= h(\beta(f(x_1), \dots, f(x_n))) = hf(\alpha(x_1, \dots, x_n)) \\ &= g(\alpha(x_1, \dots, x_n)) = \gamma(g(x_1), \dots, g(x_n)) \\ &= \gamma(h(f(x_1)), \dots, h(f(x_n))) = \gamma(h(y_1), \dots, h(y_n)). \end{aligned}$$

1.3.3. Všimněte si, že každé zobrazení je homomorfismus vzhledem k projekcím (viz 1.2).

1.4. Na operaci $\alpha : X^n \to X$ se můžeme dívat jako na $(n+1)$-ární relaci

$$\widetilde{\alpha} = \{(x_1, \dots, x_n, \alpha(x_1, \dots, x_n)) \mid (x_1, \dots, x_n) \in X^n\}$$

(to je ostatně způsob, jak se v teorii množin tak jako tak hledí na zobrazení, i když my tomuto pohledu zrovna přednost nedáváme). Potom je zobrazení $f : X \to Y$ homomorfismus vzhledem k operacím α, β právě když je homomorfismem vzhledem k $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ ve smyslu I.5. Ověřte si to jako (velmi) jednoduché cvičení.

Pro homomorfismy vzhledem k relacím neplatí tvrzení jako 1.3.1 či 1.3.2. Uvědomte si, že zde, pro homomorfismy algeber, to platí z toho důvodu, že relace vzniklé z algebraických operací jsou velmi speciální, ne proto, že by se snad jednalo o homomorfismy speciálního charakteru.

2. Algebraické struktury, algebry

2.1. Připomeňte si pojem *typu* z I.5.3.

Algebraická struktura typu Δ na množině X je soubor $\alpha = (\alpha_i)_{i\in J}$ tvořený δ_i-árními operacemi α_i; o dvojici $A = (X, \alpha)$ potom mluvíme jako o *algebře* typu Δ.

(Pokud representujeme algebraickou strukturu jako relační ve smyslu 1.4, typ se modifikuje přičtením jedničky ke každému Δ_t.)

2.2. Příklady. (a) Aritmetika přirozených čísel, první algebraická struktura se kterou jste se asi setkali, tvoří algebru typu $(2, 2, 0, 0)$ (sčítání, násobení, 0 a 1). Podobně je tomu s aritmetikou na jiných číselných soustavách.

(b) Svaz ve smyslu z III.1 je algebra typu $(2, 2)$. Předpokládáme-li existenci minimálního prvku $\perp$ a maximálního prvku $\top$, a považujeme-li je za nulární operace, dostaneme algebru typu $(2, 2, 0, 0)$.

(c) Grupa je algebra typu $(2, 0, 1)$ (násobení, neutrální prvek, inverse).

(d) Vektorový prostor nad tělesem reálných čísel, jedna z prvních struktur se kterou se student setká na vysoké škole, je algebra nekonečného, ale finitárního typu, dost objemného, $(2, 0, \overbrace{1, 1, 1, \dots}^{\mathbb{R}\text{ krát}})$: sčítání, nulový vektor, a za každé reálné číslo unární operace $(x \mapsto rx)$.

2.3. Buďte $A = (X, \alpha)$, $B = (Y, \beta)$ algebry stejného typu $\Delta = (\Delta_t)_{t\in T}$. Zobrazení $f : X \to Y$ je *homomorfismus* $A \to B$ je-li pro každé $i \in J$ homomorfismem vzhledem k α_i, β_i. Ve zřejmém smyslu mluvíme o *isomorfismu, endomorfismu* nebo *automorfismu.*

Systém všech algeber typu Δ a všech jejich homomorfismů budeme označovat

$$\mathsf{Alg}(\Delta).$$

2.4. Je velmi důležité uvědomit si, že vlastnost "býti homomorfismem" závisí na tom, které operace jsou explicite zadány. Například, vezmemeli třeba svazy A, B jako algebry typu $(2, 2)$ potom, i když třeba oba mají nejmenší a největší prvky, jsou všechna konstantní zobrazení homomorfismy; považujeme-li takové svazy za algebry typu $(2, 2, 0, 0)$ s minimálními resp. maximálními prvky jako nulárními operacemi, konstantní zobrazení (až na případ triviálního B) homomorfismy nejsou. Podobná závislost na typu se projeví též později u pojmu podalgebry.

Někdy se ale může stát, že operace přítomná implicitně je automaticky respektována homomorfismem vzhledem k jiné operaci. Například jsou-li dvě pologrupy A, B (typ (2), explicite dáno pouze násobení) náhodou grupy (v tom smyslu, že *existují* prvky e_A, e_B takové, že vždy $xe = ex = x$ a že ke každému x *existuje* y takové, že $xy = e$) potom každý pologrupový homomorfismus automaticky zachovává jednotku a inversi. To je ovšem speciální fakt daný speciálními vlastnostmi grup.

A ještě jedna poznámka. V příkladech nahoře možná čtenáři přišlo divné, že ve vektorovém prostoru byla násobení reálnými čísly brána jako jednotlivé unární operace místo (zdánlivě) přirozenější představy o binární operaci, do které vstupují prvky různého charakteru. Ale definice lineárního zobrazení, ve které se kromě zachování součtu požaduje aby pro každé reálné r platilo $h(rx) = rh(x)$, t.j. respektování jednotlivých unárních operací ($x \mapsto rx$) dává tomuto pohledu za pravdu.

2.5. Tvrzení. *Buďte $A = (X, \alpha), B = (Y, \beta)$ a $C = (Z, \gamma)$ algebry stejného typu.*

1. Buď $f : A \to B$ prostý homomorfismus a $g : A \to C$ libovolný homomorfismus. Potom existuje homomorfismus $h : C \to A$ takový, že $f \cdot h = g$ právě když $g[X] \subseteq f[X]$.

2. Buď $f : A \to B$ homomorfismus na a $g : C \to B$ libovolný homomorfismus. Potom existuje homomorfismus $h : B \to C$ takový, že $h \cdot f = g$ právě když

$$f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad g(x) = g(y).$$

Důkaz. Uvedené podmínky zaručují existenci zobrazení h takového, že $fh = g$ resp. $hf = g$. Užijte 1.3.1 a 1.3.2. $\square$

2.5.1. Důsledek. *Každý prostý homomorfismus na je isomorfismus.*

(K takovému homomorfismu f vezměme $g = \mathrm{id}$ a užijme kteréhokoli z předchozích tvrzení.)

Uvědomte si, že nic takového neplatí pro homomorfismy vzhledem k relacím!

3. Podalgebry

3.1. Buď $A = (X, \alpha)$, $\alpha = (\alpha_t)_{t \in T}$, algebra typu $\Delta = (\Delta_t)_{t \in T}$. Buď Y podmnožina množiny X a $j : Y \subseteq X$ zobrazení vložení.
Je-li Y uzavřená na všechny operace α_t, t.j.,

platí-li pro každé $t \in T$ a $\xi : \delta_t \to Y$ že $\alpha_t(j\xi)$ je v Y,

opatříme ji operacemi $(\alpha_t|Y)(\xi) = \alpha_t(j\xi)$ a o takto získané algebře mluvíme jako o *podalgebře* algebry A.

3.1.1. Pozorování a úmluva. Je-li na Y algebraická struktura β typu Δ taková, že $j : Y \to X$ je homomorfismus, je nutně $\beta = \alpha|Y$: z podmínky (hom) v 1.3 dostáváme $\beta_t(\xi) = j(\beta_t(\xi)) = \alpha_t(j\xi)$. Algebraická struktura β je tedy jednoznačně určena množinou Y a budeme-li dále mluvit o podalgebře jako o příslušné podmnožině, nemůže dojít k nedorozumění.

3.1.2. Poznámky. 1. Ve finitárním případě podmínka uzavřenosti podmnožiny na operace nabývá názorného tvaru

$$\forall t \in T, \quad \forall y_1, \ldots, y_{n_t} \in Y \quad \alpha_t(y_1, \ldots, y_{n_t}) \in Y.$$

2. Zda podmnožina tvoří podalgebru závisí na explicite uvažovaných operacích. Například v pologrupě $(\mathbb{Z}, +)$ celých čísel se sčítáním je každá z podmnožin

$$\{x \mid x \geq k\}, \quad k > 0,$$

podalgebrou. V monoidu $(\mathbb{Z}, +, 0)$ už ne, je tam však podalgebrou třeba monoid $(\mathbb{N}, +, 0)$, ten ale zase není podalgebrou grupy $(\mathbb{Z}, +, 0, (x \mapsto -x))$.

3.2. Tvrzení. *1. Je-li $B = (Y, \alpha|Y)$ podalgebra algebry $A = (X, \alpha)$ je zobrazení vložení $j : B \subseteq A$ homomorfismus.*

2. Je-li $f : B \to A$ libovolný homomorfismus je $f[B]$ podalgebra algebry A.

3. Je-li $f : B \to A$ prostý homomorfismus je jeho restrikce $f' : B \to f[B]$ isomorfismus.

Důkaz může být ponechán čtenáři jako jednoduché cvičení. Pro 3 užijte 2.5: h získané k f a homomorfismu vložení $g : f[B] \subseteq A$ je inversní homomorfismus k f'. $\square$

3.3. Tvrzení. *Průnik libovolného systému podalgeber je podalgebra.*

Důkaz. Buďte Y_i, $i \in J$ podalgebry algebry A; označme $j : Y = \bigcap Y_i \to X$, $j_i : Y_i \subseteq X$ a $k_i : y \subseteq Y_i$. Pro $\xi : \Delta_t \to Y$ je $\alpha_t(j\xi) = \alpha_t(j_i(k_i\xi)) \in Y_i$ pro každé i a tedy $\alpha_t(j\xi) \in \bigcap Y_i$.

Prázdný průnik je samozřejmě celá algebra A. $\square$

3.4. Podle 3.3 existuje pro každou podmnožinu $M \subseteq X$ algebry $A = (X\alpha)$ nejmenší podalgebra algebry A která množinu M obsahuje, totiž průnik všech podalgeber Y takových, že $M \subseteq Y$. Budeme o ní mluvit jako o *podalgebře generované množinou* M a označovat

$$\mathsf{Gen}(M).$$

Říkáme, že M je *soustava generátorů algebry* A je-li

$$\mathsf{Gen}(M) = A.$$

3.4.1. V případě finitárního typu můžeme generovanou podalgebru popsat takto. Položme

$$\begin{aligned}
&M_0 = M,\\
&M_{k+1} = \{\alpha_t(\xi) \mid t \in T,\ \xi : n_t \to X \text{ takové, že } \xi[\{1, \dots, n_t\}] \in M_k\},\\
&M_\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k.
\end{aligned}$$

Potom

$$\mathsf{Gen}(M) = M_\infty.$$

Skutečně: Zřejmě musí každá podalgebra obsahující M_k obsahovat M_{k+1}, a tedy postupně celou M_∞. Na druhé straně M_∞ je podalgebra, protože je-li $\xi[\{1, \dots, n_t\}] \in M_\infty$ musí být každé $\xi(j)$ v některé M_{k_j} a $\alpha(\xi) \in M_{k+1}$ kde $k = \max k_j$.

Z toho dále okamžitě dostáváme

Pozorování. *V případě finitárního typu platí pro mohutnost generované podalgebry*

$$|\mathsf{Gen}(M)| \leq \max(|M|, |T|, \omega_0).$$

3.4.2. Důsledek. *V případě finitárního typu je až na isomorfismus jen množina různých algeber generovaných množinami mohutností menších než pevně předepsané kardinální číslo.*

3.5. Tvrzení. *Buďte $f, g : A \to B$ homomorfismy. Potom je množina*

$$Z = \{x \mid f(x) = g(x)\}$$

podalgebra algebry A.

Následkem toho, je-li M soustava generátorů algebry A a shodují-li se homomorfismy $f, g : A \to B$ na množině M, platí $f = g$.

Důkaz. Buďte $A = (X, \alpha)$, $B = (Y, \beta)$, označme j vložení Z do X. Buď $\xi : \Delta_t \to Z$ libovolné zobrazení. Jelikož je $fj = gj$ máme $f(\alpha_t(j\xi)) = \beta_t(fj\xi) = \beta_t(gj\xi) = g(\alpha_t(j\xi))$ a tedy $\alpha_t(j\xi) \in Z$. $\square$

4. Součiny (produkty) algeber

4.1. Buďte $A_i = (X_i, \alpha^i)$, $i \in J$ algebry téhož typu $\Delta = (\Delta_t)_{t \in T}$. Vezměme kartézský součin $X = \prod_{i \in J} X_i$ a projekce $p_j = ((x_i)_{i \in J} \mapsto x_j) : X \to X_j$. Na kartézském součinu $X = \prod_{i \in J} X_i$ definujme operace α_t, $t \in T$ předpisy

$$\alpha_t(\xi) = (\alpha_t^i(p_i\xi))_{i \in J}. \tag{$*$}$$

Získanou algebru $A = (\prod_{i \in J} X_i, (\alpha_t)_{t \in T})$ nazýváme *součinem* nebo *produktem* soustavy algeber A_i, $i \in J$ a označujeme

$$\prod_{i \in J} A_i.$$

V případě konečných soustav užíváme značení

$$A \times B, \quad A_1 \times \cdots \times A_n$$

a podobně.

Uvědomte si, že součin algeber není nic jiného než kartézský součin na kterém jsou operace definovány z původně daných “po souřadnicích”. To je zvlášť jasně patrno u finitárních operací, kde formule $(*)$ dostane tvar

$$\alpha_t((x_{1i})_{i \in J}, \ldots, (x_{n_t i})_{i \in J}) = (\alpha_t^i(x_{1i} \ldots, x_{n_t i}))_{i \in J}.$$

Poznámka. Pokud bychom representovali algebraické struktury jako relační ve smyslu 1.4, dostali bychom právě zavedený produkt z již známého produktu relačních objektů. Není to tedy nic nového, a následující větu bychom vlastně ani nemuseli dokazovat. Jde spíš o to zvyknout si na přímý popis algebraické struktury s operacemi "po souřadnicích".

4.2. Věta. *1. Projekce* $p_j = ((x_i)_{i\in J} \mapsto x_j) : \prod_i A_i \to A_j$ *jsou homomorfismy.*

2. Pro každou soustavu homomorfismů

$$f_i : B = (Y, (\beta_t)_{t\in T}) \to A_i, \quad i \in J,$$

existuje právě jeden homomorfismus $f : B \to \prod_i A_i$ *takový, že* $p_i f = f_i$ *pro všechna* $i \in J$.

Důkaz. 1. Formule $(*)$ dává okamžitě

$$p_i(\alpha_t(\xi)) = \alpha_t^i(p_i(\xi)).$$

2. Víme (viz I.3.6) že existuje právě jedno *zobrazení* $f : Y \to \prod X_i$ takové, že $p_i f = f_i$, totiž zobrazení dané předpisem $f(y) = (f_i(y))_{i\in J}$. Musíme tedy dokázat, že toto f je homomorfismus. Podle $(*)$ máme

$$\begin{aligned} f(\beta_t(\xi)) &= (f_i(\beta_t(\xi)))_{i\in J} = (\alpha_t^i(f_i\xi))_{i\in J} \\ &= (\alpha_t^i(p_i f))_{i\in J} = \alpha_t(f\xi). \quad \square \end{aligned}$$

4.3. Tvrzení. *Součin podalgeber je podalgebra součinu. To jest, jsou-li* $j_i : B_i \to A_i$ *vložení podalgeber je homomorfismus*

$$j : \prod_i B_i \to \prod_i A_i$$

určený podmínkami $p_i^A j = j_i p_i^B$, $i \in J$, *vložení podalgebry.*

Důkaz. Především, rovnice $p_i^A j = j_i p_i^B$, $i \in J$, určují podle 4.2 (jednoznačně) homomorfismus. Vzhledem k 3.1.1 tedy stačí dokázat, že tento homomorfismus je prostý. Je-li $(b_i)_i \neq (b'_i)_i$ je pro nějaké k $b_k \neq b'_k$ a tedy $p_k j((b_i)_i) = j_k(b_k) \neq j_k(b'_k) = p_k j((b'_i)_i)$ a $j((b_i)_i) \neq j((b'_i)_i)$. $\square$

5. Kongruence

5.1. Buď $A = (X, \alpha = (\alpha_t)_{t\in T})$ algebra typu $\Delta = (\Delta_t)_{t\in T})$. Relace ekvivalence E na množině X se nazývá *kongruencí* na A jestliže

> pro každé $t \in T$, jsou-li $\xi, \eta : \Delta_t \to X$ takové, že pro každé $d \in \Delta_t$ je $\xi(d)E\eta(d)$, platí též $\alpha_t(\xi)E\alpha_t(\eta)$.

Možná trochu průhledněji pro finitární operace:

> platí-li x_jEy_j pro všechna j, je $\alpha_t(x_1, \dots, x_{n_j})E\alpha_t(y_1, \dots, y_{n_j})$.

5.2. Pozorování. *$E \subseteq X$ je kongruence na $A = (X, \alpha)$ právě když je to ekvivalence na X a podalgebra $A \times A$. Následkem toho (připomeňte si 3.3), množina všech kongruencí na algebře A je úplný svaz, ve kterém jsou průniky infimy.*

5.3. Buď E kongruence na algebře $A = (X, \alpha)$. Označme

$$q = (x \mapsto xE) : X \to X/E$$

a na množině X/E definujme operace $\overline{\alpha}_t$ předpisem

$$\overline{\alpha}_t(\xi) = q(\alpha_t(\eta)) \quad \text{kde} \quad q\eta = \xi.$$

Tato definice je korektní:

- především, takové η zřejmě existuje (při simultánním vybírání $\eta(d)$ v $q^{-1}[\xi(d)]$ v případě nekonečného Δ_t si ovšem musíme vypomoci užitím axiomu výběru),
- a jestliže $q\eta_1 = q\eta_2$, t.j., pro každé $d \in \Delta_t$ je $\eta_1(d)E\eta_2(d)$, platí $\alpha_t(\eta_1)E\alpha_t(\eta_2)$ a tedy $q(\alpha_t(\eta_1)) = q(\alpha_t(\eta_2))$.

Získanou algebru označíme

$$A/E$$

a někdy o ní mluvíme jako o *faktorové algebře* nebo *faktoralgebře*, nebo též jako o *kvocientu*.

Poznámka. Třebaže nulární operace nehrají roli v otázce zda daná ekvivalence je kongruence nebo ne, algebra A/E samozřejmě dědí všechny případné nulární operace algebry A: konstanta a se objeví jako konstanta aE.

5.4. Tvrzení. *1. q je homomorfismus A na A/E*

2. Kongruence na algebře A jsou právě relace tvaru

$$E_h = \{(x,y)\ |h(x) = h(y)\},$$

kde $h : A \to B$ je homomorfismus do libovolné algebry B.

3. Je-li h homomorfismus A na B existuje isomorfismus $f : B \to A/E_h$ takový, že $fh = q$.

Důkaz. 1. Přímo z definice $\overline{\alpha}_t$ dostáváme $q(\alpha_t(\eta)) = \overline{\alpha}_t(q\eta)$.

2. $E_q = E$, a to že každá E_h je kongruence je věc snadného výpočtu.

3. Máme $h(x) = h(y)$ právě když $q_h(x) = q_h(y)$. Použijte 2.5 (v obou směrech). $\square$

5.5. Pozorování. *Jsou-li $h_i : A_i \to B_i$, $i \in J$, homomorfismy na, je homomorfismus $h : \prod A_i \to \prod B_i$ daný podmínkou $p_i^B h = h_i p_i^A$ opět na. Produkt $\prod A_i/E_i$ faktorových algeber je tedy isomorfní s faktorovou algebrou produktu $\prod A_i$.*

(Homomorfismus h je dán předpisem $h((x_i)_{i\in J}) = (h_i(x_i))_{i\in J}$.)

5.6. Tvrzení. *Buďte E_i, $i \in J$ kongruence na algebře A. Označme $E = \bigcap_{i\in J} E_i$. Potom je A/E isomorfní s podalgebrou součinu $\prod_{i\in J} A/E_i$.*

Důkaz. Podle 2.5.2 máme homomorfismy $h_i : A/E \to A/E_i$ splňující $h_i(xE) = xE_i$. Vezměme nyní homomorfismus $h : X/E \to \prod A/E_i$ určený podmínkou $p_i h = h_i$. Je-li $h(xE) = h(yE)$ je $h_i(xE) = h_i(yE)$ pro každé i a tedy $xE_i = yE_i$ pro každé i, takže $(x,y) \in E = \bigcap E_i$ a konečně $xE = yE$. $\square$

5.7. Tvrzení. *Buď $h : (X,\alpha) \to (Y,\beta)$ homomorfismus na, buď $j : C \subseteq B$ vložení podalgebry. Potom $A' = h^{-1}[C]$ je podalgebra algebry A a restrikce $h' : A' \to C$ homomorfismu h je homomorfismus na.*

Následkem toho je podalgebra faktorové algebry vždy isomorfní s faktorovou algebrou podalgebry.

Důkaz. Buď $\iota : h^{-1}[C] \subseteq A$ vložení podmnožiny, $t \in T$ a $\xi : \Delta_t \to h^{-1}[C]$ zobrazení. Pro $jh'\xi$ máme $\beta_t(jh'\xi) \in C$. Podle definice homomorfismu je $h(\alpha_t(\iota\xi)) = \beta_t(h\iota\xi) = \beta_t(\iota h'\xi)$ a tedy $\alpha_t(\iota\xi) \in h^{-1}[C]$. $\square$

6. Volné algebry

Při zavedení pojmu generující soustavy v 3.4 si čtenář asi vzpoměl na generující soustavy ve vektorových prostorech, které zná již z prvního ročníku. Asi si také vzpoměl na pojem base, jakési lepší soustavy generátorů, která je navíc nezávislá. Jistě si nyní klade otázku, máme-li něco podobného také v obecném případě. Obecně ne, systém vektorových prostorů se v tomto ohledu chová výjimečně. V obecnějších třídách algeber ale přece jen některé speciální algebry, t.zv. volné algebry (jejichž význam není jen v tom, že jsou generovány speciálním způsobem) něco jako basi mají. Budeme se jim věnovat v tomto oddílu.

6.1. V dalším bude symbol $\mathcal{A}$ označovat podtřídu třídy algeber $\mathsf{Alg}(\Delta)$, zpravidla netriviální v tom smyslu, že existuje $A \in \mathcal{A}$ která má aspoň dva prvky.

Buď M množina. *Volná algebra nad M vzhledem k třídě algeber $\mathcal{A}$* je algebra $F(M) \in \mathcal{A}$ spolu se zobrazením

$$\phi_M : M \to F(M)$$

takovým, že

> pro každou algebru $A \in \mathcal{A}$ a pro každé *zobrazení* $f : M \to A$ existuje právě jeden *homomorfismus* $h : F(M) \to A$ takový, že $h \cdot \phi_M = f$.

6.1.1. Pro volné algebry $\phi_M : M \to F(M)$ a $\phi_N : N \to F(N)$ dává podmínka pro každé zobrazení $\xi : M \to N$ jednoznačně určený homomorfismus $F(\xi) : F(M) \to F(N)$ takový, že

$$F(\xi) \cdot \phi_M = \phi_N \cdot \xi.$$

Z jednoznačnosti dále okamžitě dostáváme, že

$$F(\mathrm{id}) = \mathrm{id} \quad \text{a} \quad F(\xi \cdot \eta) = F(\xi) \cdot F(\eta).$$

6.2. Tvrzení. *1. Je-li $\mathcal{A}$ netriviální třída algeber, je zobrazení ϕ_M do volné algebry vždy prosté.*

2. Množina $\phi_M[M]$ generuje algebru $F(M)$.

3. Pokud volná algebra nad M existuje, je až na isomorfismus jednoznačně určena. Přesněji, je-li $\phi' : M \to F'$ jiné zobrazení do algebry $F' \in \mathcal{A}$ splňující podmínku z 6.1, existuje isomorfismus $h : F(M) \to F'$ takový, že $h\phi_m = \phi'$.

Důkaz. 1. Buď $A \in \mathcal{A}$ algebra s aspoň dvěma prvky. Pro $x \neq y$ v M zvolme zobrazení $f : M \to A$ takové, že $f(x) \neq f(y)$. Pro příslušný homomorfismus pak máme $h(\phi_M(x)) \neq h(\phi_M(x))$ a tedy $\phi_M(x) \neq \phi_M(x)$.

2. Označme $k : M \subseteq \mathsf{Gen}(\phi_M[M])$, $j : \mathsf{Gen}(\phi_M[M]) \subseteq F(M)$ zobrazení vložení; tedy je $\phi_m = jk$. Je-li $h : F(M) \to \mathsf{Gen}(\phi_M[M])$ homomorfismus pro který $h\phi_M = k$, je $jh\phi_m = jk = \phi_M$ a tedy $jh = \mathrm{id}$, takže j musí být homomorfismus na, a $\mathsf{Gen}(\phi_M[M]) = F(M)$.

3. Máme homomorfismy $h : F(M) \to F'$ a $h' : F' \to F(M)$ takové, že $h\phi_M = \phi'$ a $h'\phi' = \phi_M$. Proto je $h'h\phi_M = \phi_M$ a $hh'\phi' = \phi'$ a jelikož též $\mathrm{id} \cdot \phi_M = \phi_M$ a $\mathrm{id} \cdot \phi' = \phi'$ je podle požadavku jednoznačnosti $hh' = \mathrm{id}$ a $h'h = \mathrm{id}$. □

6.3. Tvrzení. *Buď $q : A \to B$ homomorfismus na. Potom pro každý homomorfismus $h : F(M) \to B$ existuje homomorfismus $f : F(M) \to A$ takový, že $h = qf$.*

Důkaz. Zvolme (s užitím axiomu výběru) zobrazení $\xi : B \to A$ takové, že $q\xi = \mathrm{id}$. K zobrazení $\xi h\phi_M : M \to A$ pak vezměme homomrfismus $f : F(M) \to A$ takový, že $f\phi_M = \xi h\phi_M$. Potom je $qf\phi_M = q\xi h\phi_M = h\phi_M$ a z jednoznačnosti (qf i h jsou homomorfismy) konečně $qf = h$. □

Ve zbytku tohoto oddílu se omezíme na finitární typy. Ne že by neplatilo více (jev "volného rozšíření" jde i daleko za rámec algebry). Technicky to však zvládneme snadněji a fakta také budou názornější.

6.4. Věta. *Buď $\Delta = (n_t)_{t \in T}$ finitární typ a buď $\mathcal{A} \subseteq \mathsf{Alg}(\Delta)$ netriviální třída algeber uzavřená na tvoření součinů, podalgebry a isomorfismy. Potom pro každou množinu M existuje volná algebra nad M vzhledem k $\mathcal{A}$.*

Důkaz. Zvolme R množinu algeber z $\mathcal{A}$ takovou, že pro každou algebru z $\mathcal{A}$ která má generující množinu mohutnosti $\leq |M|$ v R existuje algebra isomorfní (to jde podle 3.4.2). Dále označme

$$U = \{u \mid u : M \to B_u \in R \text{ libovolné zobrazení}\},$$

Uvažujme součin

$$p_v : \prod_{u \in U} B_u \to B_v$$

a zobrazení $\psi : M \to \prod B_u$ dané podmínkou $p_u\psi = u$ pro každé u (tady jde o vlastnost kartézského součinu nosných množin algeber B_u podle I.3.6, ne o vlastnost součinu algeber). Vzhledem k tomu, že systém $\mathcal{A}$ je netriviální existuje pro každé $x \neq y$ zobrazení u takové, že $u(x) \neq u(y)$ takže ψ musí být prosté.

Konečně definujme

$$\phi : M \to F(M) = \mathsf{Gen}(\psi[M])$$

předpisem $\phi(x) = \psi(x)$. Tedy, označíme-li ι homomorfismus vložení $F(M) = \mathsf{Gen}(\psi[m])$ do $\prod B_u$, máme $\iota\phi = \psi$.

Buď nyní $A \in \mathcal{A}$ libovolná, a $f : M \to A$ libovolné zobrazení. Označme $B = \mathsf{Gen}(f[M])$ a rozložme f na zobrazení

$$M \xrightarrow{\ g\ } B \xrightarrow{j=\subseteq} A.$$

Podle volby množiny R existuje isomorfismus $\epsilon : B \to B' \in R$. Položme

$$u = \epsilon g \quad \text{a} \quad h = j\epsilon^{-1}p_u\iota.$$

Potom máme

$$h\phi = j\epsilon^{-1}p_u\iota\phi = j\epsilon^{-1}p_u\psi = j\epsilon^{-1}u = j\epsilon^{-1}\epsilon g = jg = f.$$

Jednoznačnost h takového, že $h\phi = f$ plyne z 3.5. $\square$

6.5. Věta. *Buď $\Delta = (n_t)_{t\in T}$ finitární typ a buď $\mathcal{A} \subseteq \mathsf{Alg}(\Delta)$ netriviální třída algeber uzavřená na tvoření součinů, podalgebry a isomorfismy. Potom každá algebra z $\mathcal{A}$ je isomorfní s faktoralgebrou volné algebry podle vhodné kongruence.*

Důkaz. Buď $A = (X, \alpha)$. Vezměme $f : X \to A$ identické zobrazení a k němu homomorfismus $h : F(X) \to A$ takový, že $h\phi = f$. Potom je h zřejmě homomorfismus na. Použijte 2.5. $\square$

6.6. Volné algebry v $\mathsf{Alg}((n_t)_{t\in T})$. V tomto odstavci popíšeme explicite volné algebry vzhledem k celé třídě $\mathsf{Alg}((n_t)_{t\in T})$. Nejde ani tak o to, mít něco konstruktivnějšího než tvrzení v 6.4 – s volnými algebrami se obvykle pracuje přímo podle definice, a existence stačí. Umožní nám to ale lehký důkaz jednoho užitečného lemmatu (6.6.1 dole).

Další výhoda bude v tom, že si na základě tohoto explicitního popisu bude čtenář moci lépe představit rovností v definici variet v dalším oddíle.

Buď tedy $\Delta = (n_t)_{t\in T}$ finitární typ, M libovolná množina. Pro $t \in T$ zvolme různé symboly σ_t, a ještě jeden, λ, navíc.
Definujme nyní *termy* w a jejich stupně $|w|$ takto:

- λ je term a $|\lambda| = 1$,
- jsou-li $w_1, \dots, w_{n_t}$ termy je $w = \sigma_t \cdot w_1 w_2 \dots w_{n_t}$ term a $|w| = \sum_{j=1}^{n_t} |w_j|$; je-li $n_t = 0$ je σ_t term a $|\sigma_t| = 0$.

Volné výrazy (přesněji, *volné M-výrazy*) jsou

$$w[x_1 x_2 \dots x_n]$$

kde w je term a $x_1 \dots x_n$ je slovo v prvcích z M délky $|w|$; v případě délky 0 je samozřejmě prázdné. Na množině všech volných výrazů definujme operace ω_t, $t \in T$, předpisem

$$\omega_t(w_1[x_1^1 \dots], \dots, w_{n_t}[x_1^{n_t} \dots]) = \sigma_t \cdot w_1 \dots w_{n_t}[x_1^1 \dots x_{|w_1|}^1 x_1^2 \dots \ \dots x_1^{n_t} \dots]$$

a získanou algebru typu Δ označíme $F(M)$ a uvažujeme ji spolu se zobrazením

$$\phi = (x \mapsto \lambda[x]) : M \to F(M).$$

Buď nyní $A = (X, (\alpha_t)_t)$ algebra z $\mathsf{Alg}((n_t)_{t\in T})$. *Interpretacemi termů w v A* rozumíme zobrazení $\overline{w}$ definovaná takto:

$$\overline{\lambda} = \mathrm{id},$$
$$\overline{\sigma_t . w_1 \dots w_{n_t}} = \alpha_t \circ (\overline{w}_1 \times \dots \times \overline{w}_{n_t})$$

(kde $\circ$ je skládání zobrazení a $(f \times g)(x, y) = (f(x), f(y))$).

Je-li $f : M \to A$ zobrazení definujme

$$h : F(M) \to A$$

předpisem

$$h(w[x_1 \dots x_m]) = \overline{w}(f(x_1), \dots, f(x_m)).$$

Ukážeme, že je to homomorfismus:

$$\begin{aligned} h(\omega_t(w_1[x_1^1 \dots], w_2[x_1^2 \dots], \dots)) &= h(\sigma_t \cdot w_1 \dots w_{n_t}[x_1^1 \dots x_1^2 \dots \ \dots x_1^{n_t} \dots]) \\ &= \overline{\sigma_t \cdot w_1 \dots w_{n_t}}(f(x_1^1), \dots, f(x_1^2), \dots \dots, f(x_1^{n_t}) \dots) \\ &= \alpha_t(\overline{w}_1(f(x_1^1), \dots), \overline{w}_2(f(x_1^2), \dots), \dots, \overline{w}_{n_t}(f(x_1^{n_t}), \dots)) \\ &= \alpha_t(h(w_1[x_1^1 \dots]), h(w_2[x_1^2, \dots]), \dots, h(w_{n_t}[x_1^{n_t} \dots])). \end{aligned}$$

Máme $h(\lambda[x]) = f(x)$; algebra $F(M)$ je generována systémem $\{\lambda[x] \mid x \in M\}$ a tedy je takový homomorfismus určen jednoznačně.

Poznámka. Na termy se můžete dívat jako na odvozené operace v nichž všechny proměnné jsou různé, $[x_1, \ldots, x_n]$ vyznačují, zhruba řečeno, jak a s jakým opakováním tam proměnné vstupují. V 7.3 tomu bude dán přesnější smysl.

6.6.1. Lemma. *Buď $F(M)$ volná algebra v $\mathsf{Alg}((n_t)_{t\in T})$. Buď X konečná podmnožina $F(M)$. Potom existuje konečná $K \subseteq M$ taková, že $X \subseteq F(K)$.*

Důkaz. Stačí vzít množinu všech prvků x, které se vyskytnou mezi x_j v $w[x_1, \ldots x_n] \in X$. $\square$

7. Třídy algeber uzavřené na základní operace. Variety

Všechny třídy algeber $\mathcal{A}$ v tomto a dalším oddílu budou automaticky považovány za uzavřené na isomorfismy, t.j., je-li $A \in \mathcal{A}$ a je-li B algebra isomorfní s A, je $B \in \mathcal{A}$. Dále, typ bude finitární, i když to v některých tvrzeních není nutné.

7.1. Třídy S, P a H. Pro třídu algeber $\mathcal{A} \subseteq \mathsf{Alg}(\Delta)$ definujeme

$$\begin{aligned}
\mathsf{S}\mathcal{A} &= \{B \mid \exists \text{ prostý homomorfismus } j : B \to A \in \mathcal{A}\},\\
\mathsf{P}\mathcal{A} &= \{\prod_{i\in J} A_i \mid (A_i)_{i\in J} \text{ libovolný soubor algeber z } \mathcal{A}\},\\
\mathsf{H}\mathcal{A} &= \{B \mid \exists \text{ homomorfismus na } h : A \to B,\ A \in \mathcal{A}\}.
\end{aligned}$$

Volněji řečeno, $\mathsf{S}\mathcal{A}$ je třída $\mathcal{A}$ rozšířená o všechny podalgebry, $\mathsf{P}\mathcal{A}$ o všechny součiny, a $\mathsf{H}\mathcal{A}$ o všechny faktorové algebry.

Poznámka. Jedná se o ustálené značení, které vychází z termínů subalgebra, produkt a homomorfní obraz. V češtině může trochu mást inverse S pro podalgebry a P pro součiny. Nebudeme kvůli tomu terminologii ani značení měnit, jen snad, abychom trochu zmatení ulevili, budeme zde (ze dvou alternativ z 4.1) užívat výraz produkt místo součin.

7.2. Tvrzení. $\mathsf{HSP}\mathcal{A}$ *je nejmenší třída algeber daného typu obsahující $\mathcal{A}$ a uzavřená na podalgebry, produkty a faktorové algebry.*

Důkaz. Triviálně platí

$$\mathsf{SS}\mathcal{A} = \mathsf{S}\mathcal{A}, \quad \mathsf{PP}\mathcal{A} = \mathsf{P}\mathcal{A} \quad \text{a} \quad \mathsf{HH}\mathcal{A} = \mathsf{H}\mathcal{A}.$$

Po řadě podle 5.7, 5.5 a 4.3 máme

$$\mathsf{SH}\mathcal{A} \subseteq \mathsf{HS}\mathcal{A}, \quad \mathsf{PH}\mathcal{A} \subseteq \mathsf{HP}\mathcal{A} \quad \text{a} \quad \mathsf{PS}\mathcal{A} \subseteq \mathsf{SP}\mathcal{A}.$$

Tedy je

$$\begin{aligned}
&\mathsf{S}(\mathsf{HSP}\mathcal{A}) \subseteq \mathsf{HSSP}\mathcal{A} = \mathsf{HSP}\mathcal{A},\\
&\mathsf{P}(\mathsf{HSP}\mathcal{A}) \subseteq \mathsf{HPSP}\mathcal{A} \subseteq \mathsf{HSPP}\mathcal{A} = \mathsf{HSP}\mathcal{A} \ \text{ a}\\
&\mathsf{H}(\mathsf{HSP}\mathcal{A}) = \mathsf{HSP}\mathcal{A}.
\end{aligned}$$

Na druhé straně, je-li $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$ uzavřená na podalgebry, produkty a faktoralgebry, je zřejmě $\mathcal{B} \supseteq \mathsf{HSP}\mathcal{A}$. □

7.3. Velmi často bývá třída algeber popsána požadavkem na splnění rovností, jako třeba

$$(\forall xy) \quad x + y = y + x \quad (\text{“komutativita součtu”})$$

nebo

$$(\forall xyz) \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad (\text{“asociativita součinu”}),$$

nebo

$$(\forall xyz) \quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad (\text{“distributivita”}).$$

U polosvazů popisovaných jako algebry ve třetí kapitole jsme se dále setkali třeba s rovnicí

$$x \wedge x = x.$$

Co mají takové požadavky společného: Jsou dány dvojice výrazů (ty výrazy pak jsou odvozené operace spolu se specifikací toho, jak do nich vstupují proměnné) a jde o to, že mají dát pro každé (specifikované) dosazení stejnou hodnotu.

Snadno a ve velké obecnosti to můžeme popsat pomocí volných algeber. Vezměmě jednou pro vždy spočetnou množinu

$$\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}.$$

Připomeňte si 6.6. Výrazy $w[x_1 \cdots x_m] \in F(\Omega)$ obsahují

1. w, zakodování odvozené operace (popisem toho jak vznikla složením ze základních operací, ty v tom vystupují svými "jmény" σ_t, a identit),

2. $x_1 \cdots x_m$ specifikaci toho, v jakém pořadí a s jakým opakováním do nich proměnné vstupují.

Požadavek splnění určité rovnice je pak dán výběrem dvojice prvků $u, v \in F(\Omega)$ a stanovením, že

> pro všechny homomorfismy $h : F(\Omega) \to A$ je $h(u) = h(v)$.

> **Příklad.** Třeba pro distributivitu nahoře můžeme vzít
>
> $$u = (\text{součin})(\lambda((\text{součet})\lambda\lambda))[a_1 a_2 a_3],$$
> $$v = (\text{součet})((\text{součin})\lambda\lambda)(\text{součin})\lambda\lambda))[a_1 a_2 a_1 a_3].$$
>
> (Symboly λ představují "vložení basických prvků", ale i identickou operaci.)

To vede k následující definici:
Buď M množina a E libovolná podmnožina produktu $F(M) \times F(M)$. Definujme

$$\mathcal{M}_M(E) = \{A\,|\forall\text{ homomorfismus } h : F(M) \to A,\ \forall (u, v) \in E,\ h(u) = h(v)\}.$$

$\mathcal{M}_M(E)$ je tedy třída všech algeber daného typu splňující všechny rovnice zakodované v E; někdy se o ní mluví jako o *třídě modelů* (teorie) E.

> **Poznámka.** Místo Ω zde máme obecnou množinu M. Důvody jsou technické – nakonec uvidíme, že s $F(\Omega)$ vystačíme.

Tuto definici doplníme tím, že pro libovolnou třídu algeber $\mathcal{A} \subseteq \mathsf{Alg}(\Delta)$ položíme

$$\mathsf{E}_M(\mathcal{A}) = \{(u, v) \in F(M) \times F(M)\,|\forall\text{ homom. } h : F(M) \to A \in \mathcal{A},\ h(u) = h(v)\}.$$

Následující formule se ověří zcela besprostředně.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{E}_M(\mathcal{A}) \supseteq \mathsf{E}_M(\mathcal{B}),\\
&E_1 \subseteq E_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}_M(E_1) \supseteq \mathcal{M}_M(E_2),\\
&\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_M(\mathsf{E}_M(\mathcal{A})),\\
&E \subseteq \mathsf{E}_M(\mathcal{M}_M(E)).
\end{aligned}$$

Tedy jsou operátory $\mathcal{M}_M$ a E_M ve vztahu "kontravariantní Galoisovy adjunkce". Opatrné uvozovky píšeme proto, že operátor E_M nemůžeme dost dobře chápat jako zobrazení (definiční obor by byl systém vlastních tříd, a měli bychom potíže s teorií množin). Nicméně z formulí snadno odvodíme třeba že

$$\mathsf{E}_M\mathcal{M}_M\mathsf{E}_M\mathcal{A} = \mathsf{E}_M\mathcal{A} \quad \text{a} \quad \mathcal{M}_M\mathsf{E}_M\mathcal{M}_M E = \mathcal{M}_M E.$$

7.4. Třídy algeber tvaru

$$\mathcal{M}_M(E)$$

nazýváme *varietami algeber* nebo *primitivními třídami algeber* (typu Δ). Někteří autoři prosazují místo těchto málo výmluvných výrazů výstižnější termín "rovnicová třída" (*equational class*). Taky bych to vítal, ale v češtině to nějak moc dobře nezní.

7.5. Lemma. *Každá varieta algeber je uzavřená na podalgebry, produkty a faktorové algebry.*

Důkaz. Buď $\mathcal{A} = \mathcal{M}_M(E)$, $A \in \mathcal{A}$ a $(u, v) \in E$.

Je-li $j : B \to A$ prostý homomorfismus a $h : F(M) \to B$ homomorfismus, je jh homomorfismus do A a tedy $jh(u) = jh(v)$.

Je-li $q : A \to B$ homomorfismus na a je-li $h : F(M) \to B$ homomorfismus, vezmeme podle 6.3 homomorfismus $f : F(M) \to A$ takový, že $qf = h$ a dostaneme $h(u) = qf(u) = qf(v) = h(v)$.

Konečně buďte $A_i \in \mathcal{A}$ a $h : F(M) \to \prod_J A_i$. Potom pro každé i je $p_i h(u) = p_i h(v)$ a tedy $h(u) = (p_i h(u))_{i\in J} = (p_i h(v))_{i\in J} = h(v)$. $\square$

8. Birkhoffova věta o varietách

8.1. Lemma. *Buď $\mathcal{A}$ třída algeber uzavřená na podalgebry (t.j., $\mathcal{A} = \mathsf{S}\mathcal{A}$). Potom je $\mathsf{E}_M\mathcal{A}$ průnik všech kongruencí Θ na $F(M)$ takových, že $F(M)/\Theta$ je v $\mathcal{A}$.*

Důkaz. Podle definice je $(u, v) \in \mathsf{E}_M(\mathcal{A})$ právě když (připomeňte si označení z 5.4)

$$\forall\ h : F(X) \to A \in \mathcal{A}, \quad (u, v) \in E_h.$$

Jelikož $E_h = E_g$ kde $g : F(M) \to h[F(M)]$ je definováno předpisem $g(x) = h(x)$, můžeme se při tom omezit na homomorfismy na (algebra $h[F(M)]$ je v

$\mathsf{S}\mathcal{A}$ a tedy opět v $\mathcal{A}$) a tedy

$$\mathsf{E}_M(\mathcal{A}) = \bigcap\{E_h \mid h : F(M) \to A \in \mathcal{A} \text{ homomorfismus na}\}. \quad \square$$

8.2. Z tvrzení 8.1 a 5.5 okamžitě dostáváme

Důsledek. *Buď $\mathcal{A}$ třída algeber uzavřená na podalgebry a produkty. Potom je $F(M)/\mathsf{E}_M\mathcal{A}$ v $\mathcal{A}$.*

8.3. Lemma. *Pro libovolnou množinu M je*

$$\mathcal{M}_\Omega \mathsf{E}_\Omega \mathcal{A} = \mathcal{M}_M \mathsf{E}_M \mathcal{A}.$$

Důkaz. Pro $(u, v) \in \mathsf{E}_M(\mathcal{A})$ můžeme podle 6.5.1 zvolit konečnou podmnožinu $K \subseteq M$ takovou, že $u, v \in F(K)$. Zvolme $K_0 \subseteq \Omega$ a zobrazení $\gamma : \Omega \to M$, $\overline{\gamma} : M \to \Omega$ jejichž restrikce na K_0 a K jsou vzájemně inversní. Připomeňme si 6.1.1 a položme

$$f = F(\gamma) : F(\Omega) \to F(M) \quad \text{a} \quad \overline{f} = F(\overline{\gamma}) : F(M) \to F(\Omega).$$

Pro $x \in F(K_0)$ a $y \in F(K)$ máme

$$\overline{f} f(x) = x \quad \text{a} \quad f\overline{f}(y) = y$$

(z definice $F(\xi)$ a formulí v 6.1.1 snadno zjistíme, že restrikce f a $\overline{f}$ na $F(K_0)$ a $F(K)$ jsou obrazy restrikcí $\gamma, \overline{\gamma}$ na K_0, K v korespondenci $\xi \mapsto F(\xi)$). Tedy pro $u_0 = \overline{f}(u)$ a $v_0 = \overline{f}(v)$ a libovolný homomorfismus $h : F(\Omega) \to B \in \mathcal{A}$ máme $h(u_0) = h\overline{g}(u) = h\overline{f}(v) = h(v_0)$, takže $(u_0, v_0) \in \mathsf{E}_\Omega\mathcal{A}$.

Buď nyní A libovolná algebra z $\mathcal{M}_\Omega\mathsf{E}_\Omega\mathcal{A}$ a $h : F(M) \to A$ libovolný homomorfismus. Pro $(u, v) \in \mathsf{E}_M\mathcal{A}$ vezměme u_0, v_0 a f zvolené v předchozím odstavci. Tedy je $(u_0, v_0) \in \mathsf{E}_\Omega\mathcal{A}$ a tedy $hf(u_0) = hf(v_0)$. To ale znamená, že $h(u) = hf\overline{f}(u) = hf(u_0) = hf(v_0) = hf\overline{f}(v) = h(v)$. Tedy je $A \in \mathcal{M}_M\mathsf{E}_M\mathcal{A}$. $\square$

8.4. Věta. (Birkhoffova věta o varietách.) *Třída algeber $\mathcal{A} \subseteq \mathsf{Alg}(\Delta)$ je varieta právě když je uzavřená na isomorfismy, podalgebry, produkty a faktorové algebry.*

Důkaz. Je-li $\mathcal{A}$ varieta, je $\mathcal{A} = \mathsf{HSP}\mathcal{A}$ podle 7.5.

Buď nyní $\mathcal{A} = \mathsf{HSP}\mathcal{A}$. Dokážeme, že $\mathcal{A} = \mathcal{M}_\Omega E$, kde $E = \mathsf{E}_\Omega\mathcal{A}$. Buď $A = (X, \alpha) \in \mathcal{M}_\Omega\mathsf{E}_\Omega\mathcal{A}$. Podle 6.4 existuje homomorfismus h zobrazující $F(X)$ na

A. Podle 8.3 je $A \in \mathcal{M}_X\mathsf{E}_X\mathcal{A}$ a tedy podle 8.1 máme $\mathsf{E}_X\mathcal{A} \subseteq E_h$. Podle 2.5.2 existuje homomorfismus $g : F(X)/\mathsf{E}_X\mathcal{A} \to A$ takový, že $gq = h$, kde $q : F(X) \to F(X)/\mathsf{E}_X\mathcal{A}$ zobrazuje x na $x\mathsf{E}_X\mathcal{A}$. Podle 8.2 je $F(X)/\mathsf{E}_X\mathcal{A} \in \mathcal{A}$. Jelikož h je na, musí být i g na a tedy konečně $A \in \mathsf{H}\mathcal{A} = \mathcal{A}$.

Dokázali jsme, že $\mathcal{M}_\Omega\mathsf{E}_\Omega\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$; opačná inkluse platí vždy. $\square$

8.5. Z 7.2 dostaneme okamžitě

Důsledek. *Buď $\mathcal{A} \subseteq \mathsf{Alg}(\Delta)$ libovolná třída algeber. Potom $\mathsf{HSP}\mathcal{A}$ je nejmenší varieta obsahující $\mathcal{A}$.*

9. Poznámky o některých speciálních algebrách

Tento oddíl není nijak systematický. Jeho účelem je připomenout několik jednoduchých fakt, která patří k všeobecnému matematickému vzdělání.

Připomeneme pojmy pologrupy a monoidu; zejména ukážeme, že asociativní operaci je vždy možno representovat jako operaci skládání zobrazení, a k tomu ještě něco více. Podobný fakt ukaážeme též o pojmu grupy. U grup pak ještě na chvíli zůstaneme a zmíníme se o zvláštním chování kongruencí. Podobné speciální chování kongruencí uvidíme potom též u okruhů. S tím souvisí pojem ideálu; dalšími aspekty tohoto pojmu kapitolu uzavřeme.

9.1. *Pologrupa* je algebra typu (2) jejíž jediná binární operace (označme ji třeba $\cdot$) je asociativní, t.j. splňuje rovnici

$$\forall x, y, z \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

Monoid je algebra $(X, \cdot, e)$ typu $(2, 0)$ taková, že $(X, \cdot)$ je pologrupa a konstanta e splňuje rovnici

$$\forall x \quad x \cdot e = e \cdot x = x. \tag{$*$}$$

Platí-li ještě

$$\forall x, y \quad x \cdot y = y \cdot x$$

mluvíme o *komutativní pologrupě* resp. *komutativním monoidu.*

9.1.1. Pozorování. *Každou pologrupu je možno rozšířit na monoid.*

Stačí totiž přidat nový prvek e a definovat pro něj násobení pravidlem $(*)$. Uvědomte si, že pokud již v naší pologrupě prvek e' chovající se jako jednotka byl, přestává se tak chovat – máme $e'e = e'$, nikoli $e'e = e$.

9.1.2. Skládání zobrazení je asociativní a tedy každá množina $\mathcal{S}$ zobrazení $X \to X$ uzavřená na skládání pologrupa; je-li v $\mathcal{S}$ identické zobrazení a považujeme-li jej za nulární operaci, máme monoid. Ve skutečnosti, až na isomorfismus, jiné pologrupy a monoidy nejsou, totiž

> *každá pologrupa může být representována jako pologrupa zobrazení nějaké množiny do sebe, se skládáním jako operací.*

Dokážeme silnější tvrzení. Pro algebru A označme symbolem

$$\mathsf{End}(A)$$

monoid *všech* endomorfismů $h : A \to A$. Platí

Tvrzení (Cayleyova representace). *Každý monoid M je isomorfní s monoidem $\mathsf{End}(A)$ pro nějakou algebru A s dostatečně mnoha unárními operacemi takovou, že $|A| \leq |M|$.*

Důkaz. Pro monoid $S = (X, \cdot, e)$ (násobení v něm dále budeme označovat pouze juxtaposicí) vezměme algebru

$$A = (X, (\rho_s)_{s \in X})$$

kde unární operace ρ_s jsou dány předpisy $(x \mapsto xs)$ (tak zvané *pravé translace*). Pro $s \in X$ dále definujme *levé translace*

$$\lambda(s) = (x \mapsto sx) : X \to X.$$

Ukážeme, že

$$\lambda : S \to \mathsf{End}(A)$$

je isomorfismus monoidů.

I. Každé zobrazení $\lambda(s)$ je homomorfismus $A \to A$: pro každé $t \in X$ máme

$$\lambda(s)(\rho_t x) = s(xt) = (sx)t = \rho_t(\lambda(s)(x)).$$

II. $\lambda(e)(x) = ex = x$, tedy $\lambda(e)$ je identický isomorfismus, a $\lambda(s) \cdot \lambda(t))(x) = \lambda(s)(\lambda(t)(x)) = s(tx) = (st)x = \lambda(st)(x)$. Tedy je λ homomorfismus.

III. Je-li $s \neq t$ máme $\lambda(s)(e) = s \neq t = \lambda(t)(e)$, tedy je λ prosté.
IV. Konečně, každý endomorfismus $h : A \to A$ je levá translace: máme

$$h(x) = h(ex) = h(\rho_x e) = \rho_x(h(e)) = h(e)x = \lambda_{h(e)}(x). \quad \square$$

Poznámka. Monoidy je možno representovat jako $\mathsf{End}(A)$ s mnohem speciálnějšími typy algeber, na příklad s pouze dvěma unárními operacemi, nebo s jednou binární operací (dokonce asociativní). Takové representace jsou ovšem mnohem obtížnější.

9.2. *Grupa* je algebra $(X; \cdot, e, (\ )^{-1})$ typu $(2, 0, 1)$ kde $(X; \cdot, e)$ je monoid, a pro zbývající unární operaci navíc platí

$$\forall x, \quad x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e.$$

Někdy se setkáváme, zvlášť ve starší literatuře, s trochu jiným zavedením pojmu grupy, totiž jako algebry G s asociativní operací (tedy pologrupy) v níž

- existuje prvek $e \in G$ takový, že pro všechna $x \in G$ je $xe = ex = x$ (a o tom se vzápětí dokáže, že je jen jeden),
- a ke každému $x \in G$ existuje $y \in G$ takové, že $xy = yx = e$ (a opět se hned dokáže, že prvek y je jednoznačně určen prvkem x).

Při tomto přístupu (na rozdíl od prvního, kdy dostaneme varietu algeber) podalgebra grupy nemusí být grupa – k tomu je nutné explicite žádat, aby příslušná podmnožina byla uzavřená na zbývající operace. Homomorfismy ale vyjdou na stejno (dokažte to jako jednoduché cvičení).

Abelova grupa je grupa, v níž navíc platí

$$\forall xy \quad xy = yx.$$

Poznamenejme, že je zvykem naznačovat, že se jedná o Abelovu grupu tím, že operace se píše jako součet (a i pro příslušnou unární operaci se užívá sugestivního značení $-x$, $x - y$ pro $x + (-y)$ a podobně.

9.2.1. Větu o Cayleyově representaci můžeme snadno zúžit na grupy. Pro algebru A označme symbolem

$$\mathsf{Aut}(A)$$

grupu *všech* automorfismů $h : A \to A$. Obdobně jako v 9.1.2 dostaneme

Tvrzení. *Každá grupa G je isomorfní s grupou $\mathsf{Aut}(A)$ pro nějakou algebru A s dostatečně mnoha unárními operacemi takovou, že $|A| \leq |G|$.*

Triviálním důsledkem je známý fakt, že *každá konečná grupa je až na isomorfismus grupa permutací nějaké konečné množiny* (ne nutně všech, samozřejmě).

9.3. Ve varietě grup mají kongruence zajímavé chování. Než k němu dojdeme, zavedeme si následující značení (které budeme užívat i u podobné záležitosti týkající se okruhů v dalších odstavcích). Pro libovolné dvě podmnožiny $X, Y \subseteq G$ pišme

$$XY = \{xy \mid x \in X,\ y \in Y\}, \quad \text{a zjednodušujeme } \{a\}X \text{ na } aX.$$

Okamžitě vidíme, že

$$(XY)Z = X(YZ) \quad (= \{xyz \mid x \in X, y \in Y, z \in Z\})$$

a že

$$\text{je-li } A \text{ podgrupa, je } AA = A.$$

Řekneme, že podgrupa $N \subseteq G$ je *normální*, platí-li

$$\forall a \in G, \quad aN = Na.$$

9.3.1. Pozorování. *Je-li $N \subseteq G$ normální podgrupa, jsou aN a bN buď totožné nebo disjunktní. Jelikož $aNbN = abNN = abN$ a $aNa^{-1}N = eN = N$, množina $\{aN \mid a \in G\}$ tvoří grupu (s jednotkou N). Označíme ji*

$$G/N.$$

(Je-li $ax = by$ a $x, y \in N$ je $a = bxy^{-1}$ a tedy $aN \subseteq bN$.)

9.3.2. Tvrzení. *1. Pro každý homomorfismus grup $h : G \to H$ je $h^{-1}[e]$ normální podgrupa grupy G.*

2. Korespondence $E \mapsto \{x \mid xEe\}$ a $N \mapsto \{(x, y) \mid x^{-1}y \in N\}$ popisují vzájemně jednoznačný vztah mezi kongruencemi na G a normálními podgrupami.

Důkaz. 1. Pro $x \in h^{-1}[e]$ a libovolné a máme $axa^{-1} \in h^{-1}[e]$ a $ax = (axa^{-1})a$.

2. $A = \{x \mid xEe\}$ je zřejmě podgrupa; pro $x \in A$ a libovolné $a \in G$ je $axEa$ a tedy $axa^{-1}Ee$ a $ax = (axa^{-1})a$. Tedy je A normální.

Pro grupu G/N z 9.3.1 vezměme homomorfismus $h = (a \mapsto aN) : G \to G/N$ je $E_h = \{(a,b) \mid aN = bN\} = \{(a,b) \mid a^{-1}b \in N\}$ (je-li $a = bx$, $x \in N$, je $b^{-1}a = x \in N$) a tedy je ekvivalence $\{(a,b) \mid a^{-1}b \in N\}$ kongruence. To, že přiřadíme-li podle formulí $E \mapsto N \mapsto E'$ a $N \mapsto E \mapsto N'$ dostaneme $E' = E$ a $N' = N$ se snadno ověří a může být ponecháno čtenáři. □

9.4. *Komutativní okruh s jednotkou* (dále jen *okruh*, o obecnějších okruzích mluvit nebudeme) je algebra $R = (X; +, -(\ ), 0, \cdot, 1)$ typu $(2,1,0,1,0)$ kde

- $(X; +, -(\ ), 0)$ je Abelova grupa,
- $(X; \cdot, 1)$ je komutativní monoid,
- a kromě toho platí rovnice

$$x(y+z) = xy + xz.$$

(Násobení $x \cdot y$ již píšeme xy.) Okruhy tedy tvoří varietu. Čtenář se jistě již na začátku studia seznámil se dvěma speciálními případy okruhů: s *obory integrity*, kde se navíc požaduje

$$xy = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ nebo } y = 0,$$

a *tělesy*, kde

$$\text{ke každému } x \neq 0 \text{ existuje } y \text{ takové, že } xy = 1.$$

Ani obory integrity ani těles již variety netvoří (vidíme to hned např. z toho, že nejsou uzavřené na produkty).

9.4.1. *Ideálem* v okruhu R rozumíme podmnožinu $J \subseteq R$ takovou, že

- J je podgrupa grupy $(X; +, -(\ ), 0)$ a
- je-li $x \in J$ a $y \in R$ obecný prvek, je $xy \in J$.

(Srovnejte s ideály v distributivních svazech, III.3.) Budou nás zajímat *vlastní ideály* $J \neq R$ (což je totéž jako požadavek $1 \notin J$).

Tvrzení. *Vlastní ideály jsou korespondencemi*

$$J \mapsto E = \{(x, y) \mid x - y \in J\}, \quad E \mapsto J = \{x \mid xE0\}$$

dány do vzájemně jednoznačného vztahu s netriviálními kongruencemi (t.j., takovými, že 0 není kongruentní s 1).

Důkaz. $E = \{(x, y) \mid x - y \in J\}$ je kongruence: Buď xEx' a yEy'. Potom je $(x+y)-(x'+y') = (x-x')+(y-y') \in J$, $(-x)-(-x') = -(x-x') \in J$, takže $(x+y)E(x'+y')$ a $(-x)E(-x')$; dále, $xy - x'y = xy - x'y + x'y - x'y' = (x - x')y + x'(y - y') \in J$ a tedy i $(xy)E(x'y')$.

$J = \{x \mid xE0\}$ je ideál: Je-li $x, yE0$ je $(x \pm y)E(0 \pm 0) = 0$ a pro z obecné je $(xz)E(0z) = 0$.

Přiřadíme-li podle formulí $J \mapsto E \mapsto J'$ a $E \mapsto J \mapsto E'$ dostaneme $x \in J'$ právě když $xE0$ právě když $x = x - 0 \in J$, a $xE'y$ právě když $x - y \in J$ právě když $(x - y)E0$ právě když xEy. □

9.5. Podobně jako v III.3 hrají zajímavou roli *maximální ideály*, t.j. takové vlastní ideály J, pro které je jediný ostře větší ideál už jen celý okruh R, a *prvoideály*, vlastní ideály J pro které platí

$$xy \in J \quad \Rightarrow \quad \text{buď } x \in J \text{ nebo } y \in J.$$

V následujícím tvrzení označíme R/J faktorový okruh získaný podle příslušné kongruence.

Tvrzení. *1. Každý vlastní ideál je možno rozšířit na maximální ideál.*

2. Každý maximální ideál je prvoideál.

Důkaz. 1. Dostaneme standardním použitím Zornova lemmatu (sjednocení systém vlastních ideálů lineárně uspořádaných inklusí je vlastní ideál – jednotka nebyla v žádném sčítanci).

2. Buď J maximální a $ab \in J$. Předpokládejme, že $a \notin J$. Definujme $K = \{x \mid xb \in J\}$. K je zřejmě ideál a $J \subsetneq K$, takže musí být $1 \in K$ a tedy $b = 1b \in J$. □

Zajímavé a poměrně snadné je

Tvrzení. *J je maximální ideál právě když R/J je těleso.*

J je prvoideál právě když R/J je obor integrity.

Ponecháme je jako cvičení, s tímto návodem: V prvním případě pro $(x, 0) \notin E$, t.j. $x \notin J$ zkoumejte množinu (ideál) $\{yx + j \mid y \text{ obecné}, \; j \in J\}$. V druhém případě je to ještě snazší: jestliže $xyE0$ je $xy \in J$, takže $x \in J$ (a tedy $xE0$) nebo $y \in J$ (a tedy $yE0$).

Kapitola V

Topologie

Přístupů k zachycení představy prostoru a spojitosti je mnoho. Studenti se obvykle nejdříve setkávají s pojmem metrického prostoru.

Je dána množina bodů X a na součinu $X \times X$ nezáporná reálná funkce ρ splňující podmínky

$$\begin{aligned}
&\rho(x, y) = 0 \text{ právě když } x = y,\\
&\rho(x, y) = \rho(y, x),\\
&\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \text{ (trojúhelníková nerovnost).}
\end{aligned}$$

Zobrazení $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ mezi metrickými prostory je *spojité* jestliže

$$\forall x \in X \ \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ takové, že } \rho(x, y) < \delta \ \Rightarrow \ \sigma(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Student se také brzy dozví, že pro mnohé účely (třeba pro účely matematické analysy) na konkretní metrice ani tak moc nezáleží – například v euklidovské rovině můžeme místo geometricky názorné vzdálenosti $\rho((x_1, x_2), \rho(y_1, y_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ vzít pohodlnější $\max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ a vše co se týká spojitosti zůstane stejné.

V roce 1914 navrhl Felix Hausdorff popis struktury spojitosti pomocí *okolí*. Ten se ve svých variantách úspěšně ujal (my budeme dávat přednost variantě v níž základním pojmem jsou *otevřené množiny*). Je to přístup velmi názorný: pojem okolí zachycuje intuici obklopení (např. bod a takový, že $\rho(a, (0, 0)) < 1$ je kruhem $M = \{x \mid \rho(x, (0, 0)) \leq 1\}$ obklopen a bod B takový, že $\rho(b, (0, 0)) = 1$ ne, i když je též $b \in M$). Spojitost zobrazení se pak definuje požadavkem aby

ke každému $x \in X$ a ke každému okolí V bodu $f(x)$ existovalo okolí U bodu x takové, že $f[U] \subseteq V$.

Příklad. Na množině reálných čísel považujme M za okolí X, existují-li čísla $a, b, \ a < x < b$ taková, že otevřený interval (a, b) je částí M. Ujasněte si, že spojitá zobrazení v právě uvedeném smyslu jsou přesně ta, která byla spojitá v běžné $\epsilon\delta$-definici.

Pomocí okolí můžeme leccos zjednodušit. Vezměme třeba rozšířenou přímku $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, pro body z $\mathbb{R}$ definujme okolí jako dříve, a pro $+\infty$ (resp. $-\infty$) vezměme taková M pro která existuje číslo K tak, že $\{x \,|x > K\} \subseteq M$ (resp. $\{x \,|x < K\} \subseteq M$). Potom formule

pro každé okolí U bodu b existuje okolí V bodu a tak, že $f[V \setminus \{a\}] \subseteq U$

definuje limitu funkce f v bodě a jako b, ať už je kterékoli z čísel a, b vlastní nebo nevlastní.

1. Základní topologické pojmy

1.1. Řekneme, že na množině X je definována *topologie pomocí okolí* je-li pro každý prvek $x \in X$ určena neprázdná množina $\mathcal{U}(x) \subseteq \exp X$ taková, že

(ok1) pro každou $U \in \mathcal{U}(x)$, $x \in U$,

(ok2) $U, V \in \mathcal{U}(x) \quad \Rightarrow \quad U \cap V \in \mathcal{U}(x)$,

(ok3) $U \in \mathcal{U}(x)$ & $U \subseteq V \quad \Rightarrow \quad V \in \mathcal{U}(x)$,

(ok4) pro každou $U \in \mathcal{U}(x)$ existuje $W \in \mathcal{U}(x)$, $W \subseteq U$, takové,že pro každé $y \in W$ je $U \in \mathcal{U}(y)$.

1.1.1. Fakt. *Platí-li* (ok1) *až* (ok4)*, platí též formálně silnější*

(ok4') *pro každou $U \in \mathcal{U}(x)$ existuje $W \in \mathcal{U}(x)$, $W \subseteq U$ takové, že pro každé $y \in W$ je $W \in \mathcal{U}(y)$.*

Důkaz. Množina $M = \{y \,|U \in \mathcal{U}(y)\}$ obsahuje x a je obsažena v U. Pro $y \in W$ existuje podle (ok4) okolí $V \subseteq U$ takové, že pro každé $z \in V$ je $U \in \mathcal{U}(z)$. Tedy je $V \subseteq W$ a podle (ok3) je $W \in \mathcal{U}(y)$. $\square$

1.2. Popíšeme teď jiný přístup (brzy se ukáže, že je s předchozím ekvivalentní). Řekneme, že na množině X je definována *topologie pomocí otevřených množin* je-li dána množina $\tau \subseteq \exp X$ taková, že

(ot1) $\emptyset, X \in \tau$,

(ot2) $U, V \in \tau \quad \Rightarrow \quad U \cap V \in \tau$,

(ok3) $U_i \in \tau,\ i \in J \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i\in J} \in \tau$.

Prvkům $U \in \tau$ říkáme *otevřené množiny.*

Poznámka. Pojem otevřené množiny není tak názorný jako pojem okolí, zato se s ním mnohem snadněji pracuje. Všimněte si též, že zde není nic jako trochu neprůhledný požadavek (ok4).

1.3. Uvedené dva přístupy (a další, o kterých bude ještě řeč) jsou ekvivalentní v následujícím smyslu: doplníme-li základní pojem vhodnou definicí druhého (jako odvozeného), dostaneme totéž, t.j., stejnou soustavu dvou pojmů. To si nyní ujasníme podrobněji.

Máme-li topologii $\mathcal{U}$ ve smyslu 1.1 definujme τ formulí

$$U \in \tau \textit{ je-li } U \in \mathcal{U}(x) \textit{ pro všechna } x \in U \tag{$*$}$$

(U je otevřená, je-li okolím každého svého bodu). Čtenář snadno ověří, že τ splňuje požadavky (ot1) až (ot3).

Máme-li topologii τ ve smyslu 1.2 definujme $\mathcal{U}$ takto:

$$U \in \mathcal{U}(x) \textit{ existuje-li } V \in \tau \textit{ tak,že } x \in V \subseteq U. \tag{$**$}$$

Opět snadno vidíme, že takový systém splňuje požadavky (ok1) až (ok4).

Začněme systémem $\mathcal{U}$ a vytvořme τ podle ($*$); považujme nyní τ za základ a definujme $\mathcal{U}'$ podle ($**$). Je-li $U \in \mathcal{U}(x)$ zvolme V podle 1.1.1; potom $V \in \tau$ a tedy $U \in \mathcal{U}'(x)$. Je-li $U \in \mathcal{U}'(x)$, vezměme V z ($**$). To je v $\mathcal{U}(x)$ a tedy také $U \in \mathcal{U}(x)$. Je tedy $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$.

Vezměme τ, definujme $\mathcal{U}$ podle ($**$) a z toho τ' podle ($*$). Je-li $U \in \tau$ je $U \in \mathcal{U}(x)$ pro každé $x \in U$ (za V vezmeme U samo) a tedy $U \in \tau'$. Je-li $U \in \tau'$ zvolme pro $x \in U$ množinu $V_x \in \tau$ tak aby $x \in V_x \subseteq U$ a máme $U = \bigcup_{x\in U} V_x \in \tau$ podle (ot3).

1.4. Uzavřené množiny. Mějme topologii na X dánu jako soustavu otevřených množin. Řekneme, že podmnožina $A \subseteq X$ je *uzavřená*, je-li $X \setminus A$ otevřená. Z DeMorganových pravidel okamžitě dostáváme, že

> *sjednocení konečného počtu a průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina.*

Můžeme též začít soustavou uzavřených množin (splňujících tento požadavek) a otevřené množiny definovat jako doplňky uzavřených.

1.5. Uzávěr. Je-li $M \subseteq (X, \tau)$ definujeme *uzávěr* množiny M jako

$$\overline{M} = \bigcap \{A \mid A \text{ uzavřená}, \ M \subseteq A\}.$$

Jelikož průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina máme okamžitě

1.5.1. Pozorování. *$\overline{M}$ je nejmenší uzavřená množina obsahující M.*

Odtud bezprostředně plyne

1.5.2. (1) $M \subseteq \overline{M}$ a $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(2) $M \subseteq N \quad \Rightarrow \quad \overline{M} \subseteq \overline{N}$.

(3) $\overline{M \cup M} = \overline{M} \cup \overline{N}$.

(4) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

1.5.3. Pokud bychom chtěli definovat uzávěr z okolí, bude se nám hodit následující formule:

$$\overline{M} = \{x \mid \text{pro každé okolí } U \text{ bodu } x, \ U \cap M \neq \emptyset\}.$$

(je-li $x \in \overline{M}$ a $U \cap M = \emptyset$ je $M \subseteq X \setminus U$, tedy $\overline{M} \subseteq X \setminus U$ a $x \notin U$. Je-li $x \notin \overline{M}$ máme $x \in U = X \setminus \overline{M}$ a $U \cap M = \emptyset$.)

1.5.4. Topologii můžeme definovat také tak, že za základní pojem vezmeme uzávěr, to jest zobrazení $u = (M \mapsto \overline{M}) : \exp M \to \exp M$ splňující formule z 1.5.2. Definujeme pak otevřené množiny jako takové, pro které je $u(X \setminus U) = X \setminus U$, a M je okolí bodu x jestliže $x \notin u(X \setminus M)$. Je užitečné cvičení přesvědčit se o ekvivalenci podobně jako v 1.3 nahoře.

A ještě jeden pojem: *vnitřkem* množiny M rozumíme největší otevřenou množinu v M obsaženou. Operace vnitřku má vlastnosti obdobné vlastnostem uzávěru (jaké přesně?) a dá se vzít za základ definice topologie na dané množině.

Shrnutí a definice. Topologickým prostorem rozumíme množinu na které je definována topologie některým ze zmíněných způsobů. Je jedno se kterým z pojmů (okolí, otevřené či uzavřené množiny, uzávěr, vnitřek) začneme, stejně potom pracujeme se všemi. V této kapitole budeme topologii obvykle zadávat otevřenými množinami, kvůli technické jednoduchosti.

2. Příklady

2.1. Metrické prostory. V metrickém prostoru (X, ρ) definujme

$$\Omega(x, \epsilon) = \{x \mid \rho(x, y) < \epsilon\}.$$

Za okolí bodu x považujeme každou $M \subseteq X$ takovou, že pro dost malé ϵ je $\Omega(x, \epsilon) \subseteq M$. Otevřená množina je (samozřejmě) taková, která je okolím každého svého bodu.

Pro bod $x \in X$ a množinu $A \subseteq X$ položme $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, a) \mid a \in A\}$. Definujeme

$$\overline{A} = \{x \mid \rho(x, A) = 0\}$$

a řekneme, že A je uzavřená jestliže $A = \overline{A}$.

Přesvědčte se, že vztahy mezi takto definovanými pojmy odpovídají definicím z předchozího oddílu.

O topologickém prostoru, který takto můžeme získat z metrického prostoru říkáme, že je *metrisovatelný*.

2.2. Diskretní prostor. Na množině X vezměme za topologii τ celou $\exp X$. Tedy, všechny množiny $M \subseteq X$ jsou otevřené i uzavřené, okolím bodu je každá množina, která ho obsahuje, $\overline{M} = M$ pro každou $M \subseteq X$. V tomto případě mluvíme o *diskretní topologii* na X.

2.3. Indiskretní prostor. To je opačný extrém: za otevřené (a tedy i uzavřené) množiny vezmeme jen $\emptyset$ a X. Potom je jediným okolím kteréhokoli bodu celý prostor, a rovněž tak uzávěr neprázdné množiny je celý prostor.

2.4. Kofinální topologie. Jen o trochu méně primitivní případ: otevřené množiny jsou $\emptyset$ a doplňky konečných množin. Uzavřené množiny jsou právě množiny konečné a celý prostor a tedy uzávěr každé nekonečné množiny je celý prostor.

2.5. Alexandrovova (kvasidiskretní) topologie. Buď $(X \leq)$ předuspořádaná množina (obvykle se následující definice používá pro uspořádané množiny, ale předuspořádání stačí). Připomeňme označení $\downarrow M = \{x \mid \exists y \in M,\ x \leq y\}$ a $\uparrow M = \{x \mid \exists y \in M,\ x \geq y\}$. V Alexandrovově topologii bereme za otevřené všechny *rostoucí* množiny (t.j. takové $U \subseteq X$, že $\uparrow U = U$). Uzavřené jsou pak všechny *klesající* množiny (t.j. takové $U \subseteq X$, že $\downarrow U = U$, a uzávěr je dán předpisem $\overline{M} = M$.

Všimněte si, že v této topologii

(qd) *všechny průniky otevřených množin jsou otevřené, všechna sjednocení uzavřených množin jsou uzavřená, a* $\overline{\bigcup_{i\in J} M_i} = \bigcup_{i\in J} \overline{M_i}$ *pro každý systém podmnožin.*

Proto se o Alexandrovových prostorech také hovoří jako o prostorech *kvasidiskretních.* Jako jednoduché cvičení si dokažte, že každý prostor splňující (qd) vznikne právě popsaným způsobem z předuspořádání (definujte $x \le y$ jako $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$).

2.6. Scottova topologie. Vyjdeme opět z uspořádané množiny $(X, \le)$. Za otevřené množiny nyní vezmeme

(Sc) *ty rostoucí množiny* $U \subseteq X$ *pro které platí, že kdykoli* D *je usměrněná a* $\sup D \in U$ *potom* $U \cap D \neq \emptyset$.

Tato topologie sehrála v teoretické informatice významnou úlohu.

2.7. Base a subbase topologie. *Base* topologie τ (zadané jako soustava otevřených množin) je libovolná $\mathcal{B} \subseteq \tau$ taková, že

$$\text{pro každou } U \in \tau,\quad U = \bigcup \{B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq U\}.$$

Uvědomte si, že base může být mnohem jednodušší a přehlednější než celá topologie: tak např. basí topologie přímky je množina všech otevřených intervalů (a stačily by $\rangle a, b\langle$ s racionálními a, b), nebo basi roviny tvoří (např.) otevřené čtverce.

Subbase topologie τ je libovolná $\mathcal{S} \subseteq \tau$ taková, že množina všech konečných průniků prvků $\mathcal{S}$ je basí τ. Subbase mohou být samozřejmě ještě mnohem jednodušší než base (pro topologii přímky už stačí vzít třeba jen $\{\{x \mid x < a\}, \{x \mid x > a\} \mid a \text{ racionální}\}$.

Pozorování. *Každá podmnožina* $\mathcal{S} \subseteq \exp X$ *je subbase nějaké topologie, totiž té nejmenší topologie v níž jsou všechny* $U \in \mathcal{S}$ *otevřené. O této topologii pak mluvíme jako o topologii generované množinou* $\mathcal{S}$*.*

(Položme $\tau = \{\bigcup \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \subseteq \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ konečná } \subseteq \mathcal{S}\}\}$. Tento systém je už uzavřen na konečné průniky (za prázdný průnik bereme celou X) a libovolná sjednocení, a na druhé straně každá topologie obsahující $\mathcal{S}$ zřejmě musí obsahovat všechny prvky z τ.)

2.8. Intervalová topologie. Buď $(X, \le)$ lineárně uspořádaná množina. Množina všech intervalů $\rangle a, b\langle = \{x \mid a < x < b\}$ tvoří basi t.zv. *intervalové topologie* na $(X, \le)$.

Pozor, nezaměňujte s kvasidiskretní topologiií uspořádání $\leq$!

2.9. Sorgenfreyova přímka. A ještě jedna, trochu kuriosní topologie na reálné přímce (hodí se např. na ilustrování některých jevů). *Sorgenfreyova topologie* je generována polouzavřenými intervaly; přesněji, má basi $\{\langle a, b\langle = \{x \mid a \leq x < b\} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

3. Spojitá zobrazení

3.1. Zobrazení $f : X \to Y$ je *spojité zobrazení* $(X, \tau) \to (Y, \theta)$ jestliže ke každému $x \in X$ a každému okolí V bodu $f(x)$ v topologii θ existuje okolí U bodu x v topologii τ takové, že $f[U] \subseteq V$.

Snadno vidíme, že

3.1.1. *Jsou-li $f : (X, \tau) \to (Y, \theta)$ a $g : (Y, \theta) \to (Z, \kappa)$ spojitá zobrazení, je i složené zobrazení $gf : (X, \tau) \to (Z, \kappa)$ spojité.*

3.2. Triviální pozorování. *Je-li na X diskretní topologie, nebo na Y indiskretní topologie, je každé zobrazení $f : X \to Y$ spojité.*

3.3. Následující větu znáte z metrických prostorů. Platí obecně.

Věta. *Buď f zobrazení $X = (X, \tau)$ do $Y = (Y, \theta)$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(1) *f je spojité.*

(2) *Pro každou U otevřenou v Y je $f^{-1}[U]$ otevřená v X.*

(3) *Pro každou A uzavřenou v Y je $f^{-1}[A]$ uzavřená v X.*

(4) *Pro každou $M \subseteq X$ je $f[\overline{M}] \subseteq \overline{f[M]}$.*

(5) *Pro každou $M \subseteq Y$ je $\overline{f^{-1}[M]} \subseteq f^{-1}[\overline{M}]$.*

Důkaz. (1)⇒(2): Je-li $x \in f^{-1}[U]$ je $f(x) \in U$ a U je jeho okolí, takže pro nějaké okolí V bodu x je $f[V] \subseteq U$ a máme $x \in V \subseteq f^{-1}f[V] \subseteq f^{-1}[U]$ a $f^{-1}[U]$ je okolí x.

(2)⇔(3) protože vzorová funkce ($M \mapsto f^{-1}[M]$) zachovává doplňky.

(3)⇒(4): $M \subseteq f^{-1}f[M] \subseteq f^{-1}[\overline{f[M]}]$ a jelikož poslední množina je uzavřená, $\overline{M} \subseteq f^{-1}[\overline{f[M]}]$ a konečně $f[\overline{M}] \subseteq \overline{f[M]}$.

(4)⇒(5) Plyne okamžitě z toho, ře $f[\overline{f^{-1}[M]}] \subseteq \overline{ff^{-1}[M]} \subseteq \overline{M}$.

(5)⇒(1) Je-li $f(x) \notin \overline{Y \setminus V}$ je $x \notin f^{-1}[\overline{Y \setminus V}]$ a tedy $x \notin \overline{f^{-1}[Y \setminus V]} = \overline{X \setminus f{-}1[V]}$. Položme $U = f^{-1}[V]$. $\square$

3.4. Z bodu (3) přechozí věty a z toho, že vzorová funkce zachovává sjednocení i průniky okamžitě dostaneme užitečný

Důsledek. *Buď $\mathcal{S}$ libovolná subbase topologie θ. Potom $f : (X, \tau) \to (Y, \theta)$ je spojité právě když pro každou $U \in \mathcal{S}$ je $f^{-1}[U] \in \tau$.*

3.5. Lemma. *Buď D podmnožina intervalu $\mathbb{I} = \langle 0, 1 \rangle$ (ten předpokládáme opatřen topologií danou běžnou metrikou) taková, že pro každé dva $a < b \in \mathbb{I}$ existuje $d \in D$ takové, že $a < d < b$. Buďte U_d, $d \in D$ otevřené množiny v topologickém prostoru X takové, že*

$$d < e \quad \Rightarrow \quad \overline{U}_d \subseteq U_e.$$

Potom zobrazení $f : X \to \mathbb{I}$ definované předpisem

$$f(x) = \inf\{d \mid x \in U_d\}$$

je spojité.

Důkaz. Máme

$$\begin{aligned} f(x) > a \ \text{ právě když } \ & x \notin \bigcap\{\overline{U}_d \mid a < d\} \ \text{ t.j. } \ x \in \mathbb{I} \setminus \bigcap\{\overline{U}_d \mid a < d\}, \\ f(x) < a \ \text{ právě když } \ & x \in \bigcup\{U_d \mid a > d\} \end{aligned}$$

takže $f^{-1}[\rangle a, 1\rangle]$ a $f^{-1}[\langle 0, a\langle]$ jsou vždy otevřené. Přitom $\{\rangle a, 1\rangle, \langle 0, a\langle \mid a \in \mathbb{I}\}$ tvoří subbasi prostoru $\mathbb{I}$. $\square$

3.6. Homeomorfismus. Existuje-li k spojitému zobrazení $f : (X, \tau) \to (Y, \theta)$ inversní zobrazení $g : (Y, \theta) \to (X, \tau)$, které je též spojité, říkáme, že f je *homeomorfismus* a že prostory (X, τ) a (Y, θ) jsou *homeomorfní.*

Tedy,

zobrazení $f : X \to Y$ které je spojité, prosté a na je homeomorfismus právě když platí kterékoli z následujících tvrzení:

(1) *pro každou U otevřenou v X je $f[U]$ otevřená v Y,*

(2) *pro každou A uzavřenou v X je $f[U]$ uzavřená v Y,*

(3) *pro každou $M \subseteq X$ je $f[\overline{U}] = \overline{f[U]}$.*

3.7. Poznámka a cvičení. Buďte $(X, \leq), (Y, \leq)$ uspořádané množiny. Ověřte, že zobrazení $f : X \to Y$ je spojité vzhledem k Alexandrovovým topologiím právě když je monotonní, a je spojité vzhledem ke Scottovým topologiím právě když zachovává suprema usměrněných množin.

4. Základní konstrukce.

4.1. Podprostor. Buď (X, τ) topologický prostor a $Y \subseteq X$. Snadno ověříme, že

$$\tau|Y = \{U \cap Y \ |U \in \tau\}$$

tvoří topologii na Y. O té se mluví jako o *topologii podprostoru*, nebo *topologii indukované na podmnožině.*

Pro zobrazení vložení $j : Y \subseteq X$ máme $Y \cap U = j^{-1}[U]$. Tedy je $j : (Y, \tau|Y) \to (X, \tau)$ spojité. Nadto je topologie podprostoru volena "úsporně": jsou zde jen ty nejnutnější otevřené množiny potřebné k tomu, aby toto zobrazení spojité bylo. To má důležitý důsledek.

Tvrzení. *Buď Y podprostor prostoru X a buď $j : Y \subseteq X$ zobrazení vložení. Je-li $f = jg : Z \to X$ spojité zobrazení, je $g : Z \to Y$ spojité.*

($g^{-1}[j^{-1}[U]] = f^{-1}[U]$ pro otevřené U jsou otevřené množiny, a v Y jiné otevřené množiny než $j^{-1}[U]$ nejsou.)

4.1.1. Pozorování. *V prostoru $(Y, \tau|Y)$ jsou uzavřené množiny právě množiny tvaru $A \cap Y$ kde A je uzavřená v X, uzávěr množiny M dostaneme z původního jako $\overline{M} \cap Y$, a okolí jsou průniky původních okolí s naší podmnožinou.*

4.1.2. Vložení podprostoru. Trochu obecněji, jsou-li (X, τ), (Y, θ) topologické prostory a $j : Y \to X$ prosté zobrazení, a je-li

$$\theta = \{j^{-1}[U] \ |U \in \tau\}$$

hovoříme o j jako o *vložení podprostoru*. Uvědomte si, že jde přesně o to, že restrikce $(x \mapsto j(x)) : X \to j[X]$ zobrazení j je homeomorfismus.

4.2. Součiny (produkty). Mějme dán systém (X_i, τ_i), $i \in J$, topologických prostorů. Na kartézském součinu $\prod_{i \in J} X_i$ definujme topologii τ subbasí

$$\{p_j^{-1}[U] \ |j \in J, \ U \in \tau_j\},$$

kde $p_j : \prod_{i\in J} X_i \to X_j$ jsou projekce $(x_i)_{i\in J} \mapsto x_j$. O karézském součinu $\prod_{i\in J} X_i$ opatřeném touto topologií mluvíme jako o *součinu* nebo *produktu* systému (X_i, τ_i), a chceme-li zdůraznit, že se jedná o tento prostor a ne jen o jeho nosnou množinu, píšeme $\prod_{i\in J}(X_i, \tau_i)$.

Pro konečné systémy píšeme

$$(X_1, \tau_1) \times (X_2, \tau_2), \quad X \times Y \times Z, \quad X_1 \times \cdots \times X_n$$

a podobně.

4.2.1. Poznámky. 1. Připomeňte si I.7 a uvědomte si, že i zde jsou podprostory a součiny projektivně vytvořeny. Topologie je zde určena požadavkem, aby význačná zobrazení (v prvním případě vložení, ve druhém projekce) byla spojitá při co nejmenším systému otevřených množin.

Podobně u faktorového prostoru a u sumy (dále v 4.3 a 4.4) půjde o injektivní vytváření.

2. Všimněte si, že pro konečné systémy metrických prostorů se topologie shoduje s topologii součinu danou metrikou (nebo některou z metrik) jak to znáte z kursů analysy.

4.2.2. Podobně jako u součinů v předchozích kapitolách platí

Věta. *Mějme dán systém spojitých zobrazení $f_i : Y = (Y, \theta) \to (X_i, \tau_i)$, $i \in J$. Potom existuje právě jedno spojité zobrazení $f : Y \to \prod_{i\in J}(X_i, \tau_i)$ takové, že pro všechna $i \in J$ je $p_i f = f_i$.*

Důkaz. Zobrazení z I.3.6 splňující $p_i f = f_i$ pro všechna $i \in J$ (totiž $f(y) = (f_i(y))_{i\in J}$) je spojité podle 3.4: máme $f^{-1}[p_i^{-1}[U]] = f_i^{-1}[U]$. $\square$

4.3. Faktorový prostor (kvocient). Buď (X, τ) topologický prostor a $q : X \to Y$ zobrazení na (zejména máme na mysli situace, kdy na množině X je dána ekvivalence E a q je projekce $(x \mapsto Ex) : X \to X/E$). Na Y definujme topologii

$$\theta = \{U \mid q^{-1}[U] \in \tau\}.$$

Je to tedy zase extrémní (tentokrát největší) topologie taková, že $q : X \to Y$ je spojité. Mluvíme o *faktorové* nebo *kvocientové* topologii, případně o *faktorovém* nebo *kvocientovém* prostoru či *faktorprostoru* nbo *kvocientu.*

Analogicky s tvrzením v 4.1 snadno dokážeme

Tvrzení. *Buď Y kvocient prostoru X při zobrazení $q : X \to Y$. Je-li $f = gq : X \to Z$ spojité je $g : Y \to Z$ spojité.*

4.4. Sumy. Mějme dán systém (X_i, τ_i), $i \in J$ topologických prostorů. Na disjunktním sjednocení $\coprod_{i\in J} X_i = \bigcup_{i\in J} X_i \times \{i\}$ definujme topologii τ basí

$$\{\iota_i[U] \mid i \in J,\ U \in \tau_i\},$$

kde $\iota_j : X_j \to \coprod_{i\in J} X_i$ jsou injekce $(x \mapsto (x,i))$. O získaném prostoru mluvíme jako o *sumě* systému (X_i, τ_i). Byly-li množiny X_i již předem disjunktní, použijeme za nosnou množinu samozřejmě jednodušeji $\bigcup_{i\in J} X_i$.

4.4.1. Analogicky jako v I.7.3 snadno zjistíme, že platí

Věta. *Mějme dán systém spojitých zobrazení $f_i : (X_i, \tau_i) \to (Y, \theta)$, $i \in J$. Potom existuje právě jedno spojité zobrazení $\coprod_{i\in J}(X_i, \tau_i) \to (Y, \theta)$ takové, že pro všechna $i \in J$ je $f\iota_i = f_i$.*

(Jedná se samozřejmě o $f(x,i) = f_i(x)$.)

4.5. A ještě trochu terminologie: jsou-li τ a θ topologie na téže množině a je-li $\tau \subseteq \theta$, říkáme o τ že je *slabší* resp. *hrubší* a o θ že je *silnější* resp. *jemnější.*

5. Několik speciálních požadavků

5.1. Řekneme, že prostor (X, τ) splňuje axiom T_0 (nebo že to je *T_0-prostor*) jestliže

$$\text{pro každé } x \neq y \text{ v } X \text{ existuje } U \in \tau \text{ tak, že } x \notin U \ni y \text{ nebo } y \notin U \ni x. \qquad (\mathrm{T}_0)$$

Snadno vidíme, že platí

5.1.1. Fakt. *X splňuje T_0 právě když $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} \ \Rightarrow\ x = y$.*

5.2. Řekneme, že prostor (X, τ) splňuje axiom T_1 (nebo že to je *T_1-prostor*) jestliže

$$\text{pro každé } x \neq y \text{ v } X \text{ existuje } U \in \tau \text{ tak, že } x \notin U \ni y. \qquad (\mathrm{T}_1)$$

Snadno vidíme, že platí

5.2.1. Fakt. *X splňuje T_0 právě když všechny konečné množiny jsou uzavřené.*

(Podmínka T_1 říká přesně to, že každá jednobodová množina je uzavřená.)

5.3. Řekneme, že (X, τ) je Hausdorffův prostor (nebo, že splňuje axiom T_2) jestliže

$$\text{pro každé } x \neq y \text{ v } X \text{ existují } U, V \in \tau \text{ tak, že } x \in U,\ y \in V \text{ a } U \cap V = \emptyset. \tag{T$_2$}$$

5.3.1. Věta. *Buďte $f, g : X \to Y$ spojitá zobrazení a buď Y Hausdorffův prostor. Potom množina $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ je uzavřená.*

Důkaz. Dokážeme, že $\{x \mid f(x) \neq g(x)\}$ je otevřená. Pro $f(x) \neq g(x)$ zvolme otevřené disjunktní $U \ni f(x)$ a $V \ni g(x)$. Potom $f^{-1}[U] \cap f^{-1}[V]$ leží v $\{x \mid f(x) \neq g(x)\}$, je otevřená, a obsahuje x. $\square$

5.3.2. Řekneme, že M je *hustá* podmnožina topologického prostoru X, je-li $\overline{M} = X$. Z 5.3.1 okamžitě dostaneme

Důsledek. *Buďte $f, g : X \to Y$ spojitá zobrazení, buď Y Hausdorffův prostor a nechť pro nějakou M hustou v X je $f|M = g|M$. Potom je $f = g$.*

5.3.3. Poznámky a příklady. Kvasidiskretní topologie (viz 2.5) je T_0 pokud je množina $(X, \leq)$ uspořádaná a ne jen předuspořádaná. Kromě diskretního případu, podobně jako Scottova topologie, není T_1. Kofinální topologie (2.4) je T_1, ale na nekonečné množině není Hausdorffova. Metrické prostory (a také Sorgenfreyova přímka) jsou Hausdorffovy; mají ale též mnohem silnější vlastnosti, o kterých budeme mluvit v dalších odstavcích.

5.4. Regularita. Řekneme, že (X, τ) je *regulární* (nebo že splňuje axiom T_3) jestliže

$$\text{pro každý bod } x \text{ a pro každou uzavřenou } A \text{ takovou, že } x \notin A \text{ existují } U, V \in \tau \text{ tak, že } x \in U,\ A \subseteq V \text{ a } U \cap V = \emptyset. \tag{T$_3$}$$

5.4.1. Věta. *Následující tvrzení o topologickém prostoru $X = (X, \tau)$ jsou ekvivalentní*

(1) *X je regulární.*

(2) *Pro každý bod $x \in X$ a každé jeho okolí M existuje uzavřené okolí N takové, že $x \in N \subseteq M$.*

(3) *Pro každou $U \in \tau$,*

$$U = \bigcup\{V \mid V \in \tau,\ \overline{V} \subseteq U\}.$$

Důkaz. (1)⇒(2): Buď $W \in \tau$ taková, že $x \in W \subseteq M$. Máme $x \notin A = X \setminus W$ a tedy existují $U, V \in \tau$ takové, že $x \in U$, $X \setminus W \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$. Položme $N = \overline{U}$.

(2)⇒(3): Pro každý bod $x \in U$ zvolme uzavřené okolí $N_x \subseteq U$ a otevřenou V_x takovou, že $x \in V_x \subseteq N_x$. Potom $\overline{V}_x \subseteq U$ a máme $U = \bigcup_{x \in X} V_x$.

(3)⇒(1): Jestliže $x \notin A$ a A je uzavřená zvolme $U \ni x$ tak, aby $\overline{V} \subseteq X \setminus A$. Položme $V = X \setminus \overline{U}$. $\square$

5.5. Úplná regularita. Řekneme, že (X, τ) je *úplně regulární* (nebo že splňuje axiom $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$) jestliže

$$\begin{aligned}&\text{pro každý bod } x \text{ a pro každou uzavřenou } A \text{ takovou, že } x \notin A\\ &\text{existuje spojité } \phi : X \to \mathbb{I} \text{ takové, že } \phi(x) = 0 \text{ a } \phi[A] \subseteq \{1\}\end{aligned} \qquad (\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}})$$

($\mathbb{I}$ je obvyklý interval $\langle 0, 1\rangle$).

5.5.1. Relace $\prec\!\!\prec$. Snadno vidíme, že podmnožina D intervalu $\mathbb{I} = \langle 0, 1\rangle$ je hustá, jestliže pro každá dvě $a < b$ v $\mathbb{I}$ existuje $d \in D$ takové, že $a < d < b$ (stejně je tomu v každé intervalové topologii). Pro otevřené množiny U, V píšeme $U \prec\!\!\prec V$ jestliže pro nějakou hustou $D \subseteq \mathbb{I}$ existují otevřené U_d, $d \in D$ takové, že

$$U_0 = U,\ U_1 = V \ \text{ a } \ d < e \ \Rightarrow \ \overline{U}_d \subseteq U_e.$$

Všimněte si, že

$\prec\!\!\prec$ *je největší interpolativní relace obsažená v relaci*

$$\prec \,=\, \{(U, V) \mid U, V \in \tau,\ \overline{U} \subseteq V\}.$$

5.5.2. Věta. *Následující tvrzení o topologickém prostoru $X = (X, \tau)$ jsou ekvivalentní*

(1) *X je úplně regulární.*

(2) *Pro každý bod $x \in X$ a každou otevřenou $U \ni x$ exituje otevřená $V \ni x$ taková, že $V \prec\!\!\prec U$.*

(3) *Pro každou $U \in \tau$,*

$$U = \bigcup\{V \mid V \in \tau,\ V \prec\!\!\prec U\}.$$

Důkaz. (1)⇒(2): Buď ϕ zobrazení z definice pro x a $A = X \setminus U$. Za D můžeme vzít celý interval a položit $U_a = \phi^{-1}[\langle 0, \frac{1}{2}(1+a)\langle]$, $U_1 = U$ (je-li $a < c < b$ je $\overline{U}_a \subseteq \phi^{-1}[\langle 0, \frac{1}{2}(1+c)\langle] \subseteq U_b$).

(2)⇒(3) je zřejmé.

(3)⇒(1) plyne z Lemmatu 3.5. $\square$

5.6. Normalita. Řekneme, že (X, τ) je *normální* (nebo že splňuje axiom T_4) jestliže

$$\text{pro každé dvě disjunktní uzavřené } A, B \text{ existují disjunktní otevřené } U, V \in \tau \text{ takové, že } A \subseteq U \text{ a } B \subseteq V. \tag{T_4}$$

Věta (Urysohnovo lemma). *Prostor X je normální právě když pro každé dvě disjunktní uzavřené A, B existuje spojité zobrazení $\phi : X \to \mathbb{I}$ takové, že $\phi[A] \subseteq \{0\}$ a $\phi[B] \subseteq \{1\}$.*

Důkaz. ⇒: Oddělme A, B otevřenými množinami U, V a položme $U(0) = U$ a $U(1) = X \setminus B$. Mějme již nalezeny $U(d)$ pro $d = \frac{k}{2^m}$, $m \le n$, $0 \le k \le 2^m$ tak, že $\overline{U(d)} \subseteq U(e)$ kdykoli $d < e$. Vezměme nyní uzavřené disjunktní $\overline{U(\frac{k}{2^n})}$, $X \setminus U(\frac{k+1}{2^n})$, oddělme je otevřenými disjunktními $U \supseteq \overline{U(\frac{k}{2^n})}$, $V \supseteq X \setminus U(\frac{k+1}{2^n})$ a položme $U(\frac{k+1}{2^{n+1}}) = U$. Tak pro diadicky racionální d induktivně dostaneme otevřené $U(d)$ splňující předpoklady lemmatu 3.5, a odtud žádanou funkci.

⇐: Stačí vzít $\phi^{-1}[\langle 0, \frac{1}{2}\langle]$ a $\phi^{-1}[\rangle\frac{1}{2}, 1\rangle]$. $\square$

5.7. O požadavcích T_i se obvykle mluví jako o *oddělovacích axiomech*. Posloupnost

$$T_0 \quad \Leftarrow \quad T_1 \quad \Leftarrow \quad T_2 \quad \Leftarrow \quad T_3 \& T_1 \quad \Leftarrow \quad T_{3\frac{1}{2}} \& T_1 \quad \Leftarrow \quad T_4 \& T_1$$

směřuje od naprosté obecnosti k prostorům stále více "geometrickým" (brzy uvidíme, že prostory s vlastností $T_{3\frac{1}{2}}$&T_1 se od podprostorů Euklidovských prostorů liší jen možnou "nekonečnou dimensí".

Žádná z těchto implikací se nedá obrátit. U prvních dvou je to patrné z již uvedených příkladů, ukázat, že Hausdorffova vlastnost neimplikuje regularitu je též snadné, a to, že úplná regularita neimplikuje normalitu také není příliž těžké. Vztah mezi regularitou a úplnou regularitou však byl dlouho problém.

Ještě si všimněte přidaných požadavků T_1; bez nich by "vyšší" oddělovací axiomy ty "nižší" neimplikovaly. K tomu abychom z (úplné) regularity dokázali T_1 ve skutečnosti stačí už T_0. Normalita a T_0 ale T_1 neimplikuje.

5.8. Oddělování a základní konstrukce. Žádná z odělovacích vlastností se nezachovává při faktorisaci (triviální příklad: zobrazme $\mathbb{R}$ na $\{0,1\}$ tak, že racionálním číslům přiřadíme 0 a iracionálním 1. Potom kvocientová topologie nemá ani vlastnost T_0). Naopak sumy, z triviálních důvodů, zachovávají každou T_i. Zajímavější jsou případy podprostorů a produktů.

5.8.1. Věta. *Vlastnosti T_i, $i = 0,1,2,3$ a $3\frac{1}{2}$ se zachovávají v podprostorech a produktech.*

Důkaz. Případy $i = 0,1,2$ jsou triviální (je-li v produktu $(x_i)_i \neq (y_i)_i$ je pro nějaké k $x_k \neq y_k$ v X_k; tam oddělíme pomocí U případně U a V a použijeme $p_k^{-1}[U]$ a $p_k^{-1}[V]$).

Regularita a úplná regularita: Je-li X (úplně) regulární, $Y \subseteq X$, A uzavřená v Y a $y \in Y$ takový, že $y \notin A$ zvolme B uzavřenou v X takovou, aby $A = B \cap Y$. Potom $y \notin B$ a oddělíme-li y od B v X (ať už množinami U, V nebo reálnou funkcí ϕ), oddělí $U \cap Y, V \cap Y$, resp. $\phi|Y$, bod y od množiny A žádaným způsobem.

Buďte nyní X_i, $i \in J$, regulární (rep. úplně regulární), $A \subseteq X = \prod X_i$ uzavřená a $X \notin A$. Potom $x \in U = X \setminus A$ a jelikož U je otevřená v X, existují $i_1, \ldots, i_n \in J$ tak,že $x \in \bigcap_{j=1}^{n} p_{i_j}^{-1}(U_j)$ pro nějaké U_j otevřené v X_{i_j}. V regulárním případě zvolme V_j otevřené tak, aby $x_{i_j} \in V_j \subseteq \overline{V}_j \subseteq U_j$. Položme $V = \bigcap p_{i_j}^{-1}[V_j]$ a $W = X \setminus \bigcap p_{i_j}^{-1}[\overline{V}_j]$. Potom $x \in V$; je-li $y \in A$ je $y \notin \bigcap p_{i_j}^{-1}[U_j]$ a tedy pro nějaké k je $y_{i_k} \notin U_k$, tedy $y_{i_k} \notin \overline{V}_k$ a $y \in W$. Zřejmě $V \cap W = \emptyset$.

V úplně regulárním případě zvolme spojitá zobrazení $\phi_j : X_{i_j} \to \mathbb{I}$ taková, že $\phi_j(x_{i_j}) = 0$ a $\phi_j[X_{i_j} \setminus U_j] \subseteq \{1\}$. Definujme $\phi : X \to \mathbb{I}$ předpisem $\phi(y) = \max(\phi_1(y_{i_j}), \ldots, \phi_n(y_{i_j}))$. Zřejmě $\phi(x) = 0$ a je-li $y \in A$ existuje k tak, že $y_{i_j} \notin U_j$ a tedy $\phi(y) = 1$. Ověření, že ϕ je spojitá funkce je snadné a mohu je ponechat čtenáři. $\square$

5.8.2. Poznámka. Normalita se ale obecně nezachovává ani v podprosorech ani v součinech. Na předvedení příkladů nemáme v této chvíli připraveno dost fakt, příliš obtížné ale nejsou.

5.9. Vlastnost $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}\&\mathrm{T}_1$ již topologické prostory velmi přibližuje metrickým. V následující větě uvidíme, že se na ně můžeme dívat jako na podprostory “zobecněných Euklidovských prostorů” $\mathbb{R}^n$ (nebo krychlí $\mathbb{I}^n$) – připustíme-li nekonečné mocniny, dostaneme je už všechny.

Připomeňme, že mocninou X^M rozumíme produkt $\prod_{m \in M} X_m$ kde $X_m = X$ pro všechna $m \in M$. Platí

Věta. (Tichonovova věta o vložení) *Prostor je úplně regulární a T_1 právě když je homeomorfní s nějakým podprostorem krychle $\mathbb{I}^M$ pro dost velkou množinu M.*

Důkaz. Podle předchozí věty jsou podprostory krychlí úplně regulární a T_1.

Nechť naopak X je úplně regulární a T_1. Položme

$$M = \{\phi : X \to \mathbb{I} \mid \phi \text{ spojité}\}.$$

Podle 4.2.1 existuje (právě jedno, ale to zde nepoužijeme) spojité zobrazení

$$\mu : X \to \mathbb{I}^M$$

takové, že

$$\text{pro všechna } \phi : X \to \mathbb{I}, \quad p_\phi \mu = \phi$$

(může vás mást, že ϕ zde vystupují jako indexy i jako spojitá zobrazení; uvědomte si, že proti tomu nic nemluví).

Zobrazení μ je prosté: Je-li $x \neq y$ v X zvolme $\phi \in M$ tak aby $\phi(x) \neq \phi(y)$. Potom $p_\phi(\mu(x)) \neq p_\phi(\mu(y))$ a tedy musí být $\mu(x) \neq \mu(y)$.

Zbývá tedy dokázat, že též zobrazení $f : \phi[X] \to X$ inversní k μ je spojité. Pro podmnožinu $A \subseteq X$ je $f^{-1}[A] = \mu[A]$ a tedy máme dokázat, že pro každou A uzavřenou v X je $\mu[A]$ uzavřená v $\mu[X]$. Pro $y \in \mu[X] \setminus \mu[A]$, tedy $y = \mu(x)$, $x \notin A$ zvolme $\phi : X \to \mathbb{I}$ tak, aby $\phi(x) = 0$ a $\phi[A] \subseteq \{1\}$ a položme $U = p_\phi^{-1}[\langle 0, \frac{1}{2}\langle]$. Máme $p_\phi(y) = p_\phi\mu(x) = \phi(x) = 0$, tedy $y \in U$, zatímco pro každé $a \in A$ je $p_\phi\mu(a) = \phi(a) = 1$, takže $U \cap \mu[A] = \emptyset$ a množina $\mu[A] = \mu[X] \cap \overline{\mu[A]}$ je uzavřená v $\mu[X]$. $\square$

Poznámka. Všimněte si podobnosti s konstrukcé v II.5.3.2. Tato podobnost vůbec není náhodná.

5.10. Na první pohled se nezdá, že by mohl být nějaký rozumný oddělovací axiom mezi T_0 a T_1, ale je, a v teoretické informatice sehrál jistou roli. Řekneme, že X splňuje podmínku T_D (to se píše místo trochu nepohodlného $\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$) jestliže

$$\text{pro každý } x \in X \text{ existuje } U \in \tau, \text{ tak, že } x \in U \text{ a } U \cap \overline{\{x\}} = \{x\}. \qquad (\mathrm{T}_D)$$

Například kvasidiskretní prostory jsou vždy T_D třebaže kromě triviálních případů nejsou T_1.

5.11. Střízlivé prostory. Dívejme se na okamžik na operaci průniku otevřených množin jako na jakési násobení. Potom se množiny typu $X \setminus \overline{\{x\}}$ chovají jako "prvočísla", to jest, je-li

$$X \setminus \overline{\{x\}} = U \cap V,$$

musí buď U nebo V být $X \setminus \overline{\{x\}}$ (x nesmí být v obou U i V, jinak by bylo i v průniku, a je-li už dejme tomu $x \in X \setminus U$, je $\overline{\{x\}} \subseteq X \setminus U$ a $U \subseteq X \setminus \overline{\{x\}}$). Střízlivé prostory jsou T_0-prostory, v nichž jiná "prvočísla" nejsou.

V korektnější terminologii: Řekneme, že $W \in \tau$ je *ireducibilní*, jestliže $W \neq X$ a

$$W = U \cap V,\ U, V \in \tau \quad \Rightarrow \quad W = U \text{ nebo } W = V.$$

Prostor je *střízlivý* jesliže pro každou ireducibilní W existuje právě jeden bod x takový, že $X = X \setminus \overline{\{x\}}$.

5.11.1. Věta. *Každý Hausdorffův prostor je střízlivý.*

Důkaz. Nechť $W \in \tau$ neobsahuje aspoň dva různé body x, y. Zvolme $U, V \in \tau$ disjunktní tak, aby $x \in U$ a $y \in V$. Potom $W = (W \cup U) \cap (W \cup V)$ a $W \cup U \neq W \neq W \cup V$. $\square$

5.11.2. Poznámka. Střízlivý prostor nemusí být T_1 (a ani T_1 neimplikuje střízlivost). Například konečné kvasidiskretní prostory jsou střízlivé. Scottovy (i nekonečné) prostory jsou často střízlivé – příklad opaku byl významný výsledek.

6. Kompaktnost

6.1. *Pokrytí* (přesněji, otevřené pokrytí, ale o jiných zde mluvit nebudeme) topologického prostoru (X, τ) je podmnožina $\mathcal{U} \subseteq \tau$ taková, že $\bigcup \mathcal{U} = X$. Často mluvíme o *pokrytí* $\mathcal{U}$ *podmnožiny* $Y \subseteq X$ jestliže $\bigcup \mathcal{U} \supseteq X$. Je-li $\mathcal{U}$ pokrytí X a $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ podsystém takový, že stále ještě $\bigcup \mathcal{V} = X$, mluvíme o *podpokrytí*, nebo o *pokrytí vybraném* z $\mathcal{U}$ (je to jen slovní obrat, nejde o žádný výběrový princip).

6.2. Řekneme, že prostor X je *kompaktní*, dá-li se z každého jeho pokrytí vybrat konečné podpokrytí. Mluvíme o *kompaktní podmnožině* Y (obecného) prostoru (X,τ) je-li podprostor $(Y,\tau|Y)$ kompaktní; všimněte si, že to znamená přesně to, že z každého pokrytí $\mathcal{U}$ *podmnožiny* Y lze vybrat konečné (je-li totiž $\mathcal{U} \subseteq \tau$ takové, že $\bigcup\mathcal{U} \supseteq Y$, máme pokrytí $\{U \cap Y \;|U \in \mathcal{U}\}$ *prostoru* Y).

6.3. Věta. *1. Každá uzavřená podmnožina kompaktního prostoru je kompaktní.*

2. Obraz kompaktní podmnožiny při spojitém zobrazení je kompaktní podmnožina.

Důkaz. 1. Je-li X kompaktní a $A \subseteq X$ uzavřená, je pro každé pokrytí $\mathcal{U}$ množiny A systém $\mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ pokrytí prostoru X. Z toho vybereme konečné $\mathcal{V}$, a $\mathcal{V} \setminus \{X \setminus A\}$ pokryje A.

2. Buď $f : X \to Y$ spojité, A kompaktní podmnožina X a $\mathcal{U}$ pokrytí množiny $f[A]$. Potom $\{f^{-1}[U] \;|U \in \mathcal{U}\}$ pokrývá A. Vyberme $U_1, \dots . U_n \in \mathcal{U}$ tak, aby $\bigcup_{i=1}^n f^{-1}[U_i] = f^{-1}[\bigcup_{i=1}^n U_i] \supseteq A$ a máme $\bigcup_{i=1}^n U_i \supseteq f[A]$. □

6.4. Všechna pokrytí tvoří značně nepřehlednou množinu. Následující věta umožňuje dokázat, že prostor je kompaktní na základě mnohem menšího systému.

Věta. (Alexanderovo lemma) *Nechť pro nějakou subbasi $\mathcal{S}$ prostoru $X = (X,\tau)$ platí, že z každého pokrytí $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ lze vybrat konečné podpokrytí. Potom X je kompaktní.*

(**Poznámka.** V důkazu budeme používat Zornovo lemma. Jednodušeji to nejde: tvrzení je ekvivalentni s axiomem výběru.

Důkaz provedeme sporem. Řekneme, že pokrytí je *velké*, nelze-li z něj vybrat konečné podpokrytí.

> **Fakt.** *Existuje-li velké pokrytí, existuje i maximální velké pokrytí, t.j., takové velké pokrytí $\mathcal{A}$, že kdykoli $U \notin \mathcal{A}$, dá se již z $\mathcal{A} \cup \{U\}$ konečné podpokrytí vybrat.*
>
> (Skutečně, užijme Zornova lemmatu: Je-li $\mathfrak{A}$ soustava velkých pokrytí lineárně uspořádaná inklusí, musí být $\bigcup\mathfrak{A}$ také velké pokrytí, protože kdybychom z něj vybrali konečné $\mathcal{V} = \{U_1, \dots, U_n\}$ a $U_i \in \mathcal{A}_i \in \mathfrak{A}$, bylo by $\mathcal{V}$ částí největšího z $\mathcal{A}_i$.)

Položme $\mathcal{B} = \tau \setminus \mathcal{A}$. Potom platí:

$U \in \mathcal{B}$ právě když pro nějaké $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{A}$ je $U \cup U_1 \cup \dots \cup U_n = X$.

($\Rightarrow$ z maximality $\mathcal{A}$, $\Leftarrow$ z toho, že $\mathcal{A}$ je stále ještě velké). Následkem toho,

$$V \supseteq U \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad V \in \mathcal{B} \tag{$*$}$$

(je-li $U \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n = X$ je též $V \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n = X$) a

$$U, V \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad U \cap V \in \mathcal{B} \tag{$**$}$$

(je-li $U \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n = X$ a $V \cup V_1 \cup \cdots \cup V_n = X$, je $(U \cap V) \cup \bigcup U_i \cup \bigcup V_i = (U \cup \bigcup U_i \cup \bigcup V_i) \cap (V \cup \bigcup U_i \cup \bigcup V_i) = X$).

Vezměme nyní libovolný bod $x \in X$. Jelikož $\mathcal{A}$ je pokrytí, existuje $U \in \mathcal{A}$ takové, že $x \in U$; jelikož je $\mathcal{S}$ subbase, existují $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ takové, že $x \in \bigcap_{i=1}^n S_i \subseteq U$. Nyní ale nemohou být všechny S_i v $\mathcal{B}$, protože v takovém případě by podle ($**$) bylo $\bigcap_{i=1}^n S_i$ a podle ($*$) také U v $\mathcal{B}$. Tedy některé z S_i je v $\mathcal{A}$, což je spor, protože to vzhledem k tomu, že bod x byl libovolný znamená že již $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ je pokrytí; z toho by se muselo dát vybrat konečné. $\square$

6.4.1. Příklad. Takto třeba snadno vidíme, že $\mathbb{I}$ je kompaktní. Vezměme $\mathcal{S} = \{\langle 0, a\langle \ |a \in \mathbb{I}\} \cup \{\rangle a, 1\rangle \ |a \in \mathbb{I}\}$ a pokrytí $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$. Položme $s = \sup\{a \,|\langle 0, a\langle \in \mathcal{U}\}$. Zřejmě s není v žádném $\langle 0, a\langle \in \mathcal{U}$ a tedy pro nějaké b je $s \in \rangle b, 1\rangle \in \mathcal{U}$. Z definice suprema a toho, že $s > b$ máme $\langle 0, a\langle \in \mathcal{U}$ takové, že $a > b$. Potom $\mathbb{I} = \langle 0, a\langle \cup \rangle b, 1\rangle$.

6.5. Věta (Tichonovova věta o součinu). *Součin libovolného systému kompaktních prostorů je kompaktní.*

Důkaz. Buďte $X_i = (X_i, \tau_i)$, $i \in J$, kompaktní. Vezměme pokrytí $\mathcal{U}$ prostoru $X = \prod X_i$ které je podmnožinou subbase $\mathcal{S} = \{p_i^{-1}(U) \ |U \in \tau_i\}$ a označme $\mathcal{U}_i = \{U \in \tau_i \ |p_i^{-1}(U) \in \mathcal{U}\}$. Potom

existuje $k \in J$ takové, že $\mathcal{U}_k$ pokrývá X_k.

(kdyby ne, měli bychom pro každé i bod $x_i \notin \bigcup \mathcal{U}_i$; jenomže $(x_i)_i$ leží v některé $p_j^{-1}(U) \in \mathcal{U}$ a tedy $x_j \in U \in \mathcal{U}_j$). Vybereme-li nyní z $\mathcal{U}_k$ konečné pokrytí $\mathcal{V}$, máme konečné podpokrytí $\{p_k^{-1}(V) \ |V \in \mathcal{V}\}$. $\square$

6.5.1. Zejména pak libovolný součin konečných prostorů je kompaktní. Tento fakt má užitečné důsledky v kombinatorice a v logice.

6.6. Věta. *V Hausdorffově prostoru X je každá kompaktní podmnožina uzavřená.*

Důkaz. Buď $A \subseteq X$ kompaktní podmnožina. Pro $x \notin A$ a $a \in A$ zvolme U_a, V_a otevřené disjunktní takové, že $x \in U_a$ a $a \in V_a$. Potom $\{V_a \mid a \in A\}$ je pokrytí množiny A a můžeme z něho vybrat konečné $V_{a_1}, \ldots, V_{a_n}$. Položme $U = \bigcap_{i=1}^n U_{a_i}$. U je okolí bodu x a neprotíná A, takže $x \notin \overline{A}$. Tedy $\overline{A} \subseteq A$. □

6.6.1. Důsledky. *Buď $f : X \to Y$ spojité zobrazení, X kompaktní a Y Hausdorffův. Potom*

(1) pro každou uzavřenou $A \subseteq X$ je $f[A]$ uzavřená,
(2) je-li f prosté, je to vložení podprostoru,
(3) je-li f na, je to kvocient, a
(4) je-li f vzájemně jednoznačné, je to homeomorfismus.

6.7. Věta. *Každý Hausdorffův kompaktní prostor je normální.*

Důkaz. Nejprve dokážeme, že je regulární. Buď $x \notin A$, A uzavřená a tedy kompaktní. Pro $a \in A$ zvolme U_a, V_a otevřené disjunktní takové, že $x \in U_a$ a $a \in V_a$. Potom $\{V_a \mid a \in A\}$ je pokrytí kompaktní množiny A a můžeme z něho vybrat konečné $V_{a_1}, \ldots, V_{a_n}$ tak, že $A \subseteq V = \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$. Položme $U = \bigcap_{i=1}^n U_{a_i}$ a máme $x \in U$ a $U \cap V = \emptyset$.

Pro normalitu nyní proceduru zopakujeme: Pro $b \in B$ zvolíme disjunktní $V_b \ni b$ a $U_b \supseteq A$, vybereme $V_{b_1}, \ldots, V_{b_n}$ pokrytí B, a položíme $U = \bigcap_{i=1}^n U_{b_i}$ a $V = \bigcup_{i=1}^n V_{b_i}$. □

6.8. Čechova-Stoneova kompaktifikace. Buď X úplně regulární T_1-prostor. Vezměme

$$\mu_X : X \to \mathbb{I}^{M(X)}$$

z 5.9 s množinou $M(X) = \{\phi : X \to \mathbb{I} \mid \phi \text{ spojité}\}$. Podle 6.5 je $\mathbb{I}^M$ kompaktní a tedy je i $\beta(X) = \overline{\mu_X[X]}$ kompaktní. Pro $f : X \to Y$ definujme $\widetilde{f} : \mathbb{I}^{M(X)} \to \mathbb{I}^{M(Y)}$ předpisem $p_\phi \widetilde{f} = p_{\phi f}$. Máme

$$\widetilde{f} \mu_x = \mu_Y f$$

(stále užíváme 4.2.2, včetně jednoznačnosti: $p_\phi \widetilde{f} \mu_x = p_{\phi f} \mu_x = \phi f = p_\phi \mu_Y f$) a tedy podle 3.3 $\widetilde{f}[\beta(X(] \subseteq \widetilde{\overline{[\mu_X[X]]}} \subseteq \overline{\mu_Y f[X]} \subseteq \beta(Y)$. Můžeme tedy definovat spojité $\beta(f) : \beta(X) \to \beta(Y)$ předpisem $\beta(f)(x) = \overline{f}(x)$ a označíme-li ν_X restrikci μ_X na $X \to \beta(X)$, máme

$$\beta(f)\nu_x = \nu_Y f.$$

Podle 6.6.1,

pro kompaktní prostor X je ν_x homeomorfismus.

Odtud dostáváme (připomeňte si též 5.3.2)

Větu (o Čechově-Stoneově kompaktifikaci) *Pro každý úplně regulární T_1-prostor X existuje kompaktní Hausdorffův prostor $\beta(X)$ a husté vložení $\nu_x : X \to \beta(X)$ takové, že pro každé spojité zobrazení $f : X \to Y$ do kompaktního Hausdorffova prostoru existuje (právě jedno) spojité zobrazení $\overline{f} : \beta(X) \to Y$ takové, že $\overline{f}\nu_X = f$.*

(Totiž, $\overline{f} = \nu_Y^{-1}\beta(f)$.)

Poznámka. Prostory $\beta(X)$ jsou dost složité a nepříliš snadno představitelné. Například pro nekompaktní metrický X není $\beta(X)$ nikdy metrisovatelný.

6.9. Lokálně kompaktní prostory. Řekneme, že prostor X je *lokálně kompaktní* jestliže pro každý bod $x \in X$ a pro každé jeho okolí U existuje kompaktní okolí $K \subseteq U$.

Lokálně kompaktní prostory hrají velmi podstatnou roli v matematice i v informatice. Zde pouze upozorníme na to, že

kompaktní prostor nemusí být lokálně kompaktní,

že ale na druhé straně

každý Hausdorffův kompaktní prostor lokálně kompaktní je

(dokažte to jako jednoduché cvičení).

6.10. Lindelöfovy prostory. A ještě jeden pojem příbuzný kompaktnosti. Řekneme, že prostor je *Lindelöfův*, dá-li se z každého jeho pokrytí vybrat podpokrytí nejvýš spočetné. Něco více se o takových prostorech dozvíme v příští kapitole, nyní uvedeme jen jednu větu o oddělování.

Věta. *Regulární Lindelöfův prostor je normální.*

Důkaz. Buďte A, B disjunktní uzavřené podmnožiny regulárního Lindelöfova prostoru X. Pro $x \in A$ zvolme otevřenou $U(x)$ tak, aby $x \in U(x) \subseteq \overline{U(x)} \subseteq X \setminus B$. Uzavřený podprostor Lindelöfova prostoru je Lindelöfův (ze stejného důvodu jako v obdobném tvrzení o kompaktních prostorech) a tedy z pokrytí $\{U(x) \mid x \in A\}$ můžeme vybrat spočetné podpokrytí $U_1, U_2, \ldots$ množiny A. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots$ (původní $U_1, U_2, U_3, \ldots$ můžeme nahradit $U_1, U_1 \cup U_2, U_1 \cup U_2 \cup U_3, \ldots$), takže dostáváme systém otevřených množin

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq \cdots \text{ takový, že } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \text{ a } \overline{U}_i \cap B = \emptyset.$$

Podobně zvolíme otevřené

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \cdots \text{ takové, že } B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \text{ a } \overline{V}_i \cap A = \emptyset.$$

Položme $U_i' = U_i \cap (X \setminus \overline{V}_i)$ a $V_i' = V_i \cap (X \setminus \overline{U}_i)$. Potom stále ještě $A \subseteq U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i'$ a $B \subseteq V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i'$, U a V jsou otevřené, a $U \cap V = \emptyset$ protože pro všechny dvojice i, j je $U_i' \cap V_j' = \emptyset$ (je buď $i \leq j$ a potom $U_i \cap (X \setminus \overline{U}_j) = \emptyset$ nebo je $j \leq i$ a potom $V_j \cap (X \setminus \overline{V}_i) = \emptyset$). $\square$

Poznámky. 1. Zjistit, že prostor je regulární je často velmi snadné, a Lindelöfova vlastnost také nemusí být neprůhledná. Z věty tak např. snadno plyne, že Sorgenfreyova přímka je normální, přímý důkaz by tak snadný nebyl.

2. Kromě jiného dává tato věta tušit, proč bylo tak obtížné najít příklad prostoru, který je regulární ale ne úplně regulární.

7. Souvislost

V tomto odstavci se budeme krátce zabývat geometricky velmi názorným pojmem souvislosti prostoru. Zhruba řečeno, půjde o zachycení dvou představ:

(1) o otázku zda prostor "drží pohromadě" nebo se rozpadá na víceméně nezávislé části ("souvislost" – viz 7.1), a

(2) o otázku, zda se můžeme "dostat z libovolého místa na libovolné jiné bez skoků" ("křivková souvislost" – viz 7.7.).

7.1. Řekneme, že podmnožina A topologického prostoru X je *obojetná*, je-li zároveň otevřená i uzavřená. V každém prostoru X máme triviální obojetné množiny X a $\emptyset$. Půjde o to, zda tam jsou také jiné.

Neprázdný prostor je *souvislý*, neobsahuje-li kromě triviálních žádné jiné obojetné množiny; jinak říkáme, že je *nesouvislý*. Jinými slovy, neprázdný prostor X je nesouvislý

> *existují-li v něm dvě neprázdné disjunktní otevřené množiny A, B takové, že $X = A \cup B$,*

nebo

> *existují-li v něm dvě neprázdné disjunktní uzavřené množiny A, B takové, že $X = A \cup B$.*

Podmnožina Y prostoru (X, τ) je *souvislá* resp. *nesouvislá* je-li prostor $(Y, \tau|Y)$ souvislý resp. nesouvislý.

7.2. Důležitý příklad. *Interval $\mathbb{I}$ je souvislý:*
Nechť $\mathbb{I} = A \cup B$ a nechť A, B jsou neprázdné disjunktní uzavřené množiny. Nechť dejme tomu $1 \in B$. Položme $s = \sup A$. Zřejmě je $s \in \overline{A} = A$ (protože v každém intervalu $\rangle s - \epsilon, s + \epsilon\langle$ je bod z A) a tedy $s < 1$. Jenomže potom každý interval $\rangle s - \epsilon, s + \epsilon\langle$ obsahuje také bod z B a $s \in \overline{B} = B$, což je spor. $\square$

7.3. Věta. *Spojitý obraz souvislé množiny je souvislá množina.*
Důkaz. Buď $f : X \to Y$ spojité zobrazení a buď $M \subseteq X$ souvislá množina. Nechť $f[M] = A \cup B$ kde A, B jsou disjunktní neprázdné uzavřené podmnožiny $f[M]$. Označme $g : M \to f[M]$ restrikci zobrazení f. Potom je g spojité zobrazení (viz 4.1) a máme tedy $M = g^{-1}[A] \cup g^{-1}[B]$ s disjunktními neprázdnými uzavřenými $g^{-1}[A], g^{-1}[B]$. $\square$

7.4. Věta. *Uzávěr souvislé podmnožiny je souvislá podmnožina.*
Důkaz. Buď M souvislá podmnožina prostoru X, buď $\overline{M} = A \cup B$ s disjunktními uzavřenými A, B (uzavřenost v $\overline{M}$ je totéž jako uzavřenost v X). Potom máme $M = (A \cap M) \cup (B \cap M)$ s $A \cap M$, $B \cap M$ disjunktními uzavřenými v M. Jedna z těchto množin musí být prázdná, dejme tomu $M \cap A = \emptyset$. Potom je $M \subseteq B$ a následkem toho $\overline{M} \subseteq B$ a A musí být prázdná. $\square$

7.5. Věta. *Nechť je $X = \bigcup_{i \in J} X_i$, nechť všechny podmnožiny $X_i \subseteq X$ jsou souvislé a nechť pro každé dva indexy $i, j \in J$ existují $i_1, \dots, i_n$ takové, že*

$$i = i_1,\ j = i_n \quad \textit{a pro} \quad k = 1, \dots, n-1 \quad \textit{je vždy} \quad X_{i_k} \cap X_{i_{k+1}} \neq \emptyset. \qquad (*)$$

Potom je X souvislý prostor.

Důkaz. Nechť je $X = A \cup B$ s disjunktními otevřenými A, B. Potom pro každý index $i \in J$ je $X_i = (X_i \cap A) \cup (X_i \cap B)$ s $X_i \cap A,\ X_i \cap B$ disjunktními otevřenými v X_i. Tedy musí být vždy jedna z těchto množin prázdná, takže je vždy buď $X_i \subseteq A$ nebo $X_i \subseteq B$. V prvním případě zařadíme i do podmnožiny $J_A \subseteq J$, v druhém případě do $J_B \subseteq J$. Je-li $i \in J_A$ a $j \in J_B$ máme zřejmě $X_i \cap X_j = \emptyset$. Podle $(*)$ jsou tedy všechny indexy v jedné skupině, dejme tomu v J_A. Je tedy $X_i \subseteq A$ pro všechna i, tedy $X = \bigcup X_i \subseteq A$, a $B = \emptyset$. $\square$

7.6. Důsledek. *Součin dvou souvislých prostorů je souvislý.*

Důkaz. Vyberme $x_0 \in X$. Máme $X \times Y = (\bigcup\{X \times \{y\} \mid y \in Y\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$, všechny sčítance souvislé (homeomorfní s X nebo Y), a soustava splňuje předpoklady předchozí věty. $\square$

Ve skutečnosti platí obecnější

7.6.1. Věta. *Součin libovolného systému souvislých prostorů je souvislý.*

Důkaz. Podle 7.6 je především součin každého takového konečného systému souvislý. Buď nyní X_i, $i \in J$ libovolná soustava souvislých prostorů. Vyberme pro každé $i \in J$ bod $a_i \in X_i$ a uvažujme pro konečné $K \subseteq J$ podprostory

$$X_K = \{(x_i)_{i \in J} \mid \text{pro všechna } i \notin K,\ x_i = a_i\}.$$

Prostor X_K je homeomorfní s $\prod_{i \in K} X_i$ (dokažte) a tedy souvislý. Pro libovolné konečné $K, L \subseteq J$ je $X_K, X_L \subseteq X_{K \cup L}$ a tedy podle 7.5 je $M = \bigcup\{X_K \mid K \text{ konečná} \subseteq J\}$ souvislá podmnožina. Pro libovolnou neprázdnou otevřenou basickou množinu $U = \bigcap_{i \in K} p^{-1}[U_i]$ je $U \cap X_K \neq \emptyset$, tedy je $\prod_J X_i = \overline{M}$ souvislý podle 7.4. $\square$

Poznámka. Věta se dá obrátit:

Je-li $\prod_J X_i$ souvislý, jsou všechny jednotlivé X_i souvislé.

O to se postará věta 7.3 a spojité projekce.

Všimněte si, že v tom hrálo podstatnou roli to, že jednou z podmínek souvislosti bylo, aby prostor byl neprázdný.

7.7. Křivková (oblouková) souvislost. *Cestou* (nebo *křivkou*) spojující body x a y v prostoru X rozumíme spojité zobrazení $\phi : \mathbb{I} \to X$ takové, že $\phi(0) = x$ a $\phi(1) = y$.

Řekneme, že neprázdný prostor je *křivkově* (nebo též *obloukově*) souvislý, dají-li se v něm libovolné dva body spojit křivkou.

7.7.1. Věta. *Křivkově souvislý prostor je souvislý.*

Důkaz. To je opět důsledek věty 7.5 (a ovšem též 7.2 a 7.3). Zvolme pevně bod $x_0 \in X$ a potom ke každému bodu $x \in X$ křivku $\phi_x : \mathbb{I} \to X$ spojující x_0 s x. Potom máme $X = \bigcup\{\phi_x[\mathbb{I}] \,|x \in X\}$ a systém $\{\phi_x[\mathbb{I}] \,|x \in X\}$ splňuje předpoklady věty 7.5. $\square$

Důsledky. Tedy na příklad všechny euklidovské prostory jsou souvislé, a obecněji všechny jejich konvexní podmnožiny. Ale ještě obecněji, všechny podprostory u nichž umíme popsat spojení křivkami, třeba sféry $\{x \,|\rho((0,\dots,0),x) = 1\}$ a podobně.

7.8. Příklad. V euklidovské rovině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vezměme podprostor

$$X = \{(0,y) \,|0 \le y \le 1\} \cup \{(x, \sin\frac{1}{x}) \,|0 < x \le 1\}.$$

Množina $M = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \,|0 < x \le 1\}$ jako obraz souvislého intervalu $\rangle 0,1\rangle$ při spojitém zobrazení $x \mapsto (x, \sin\frac{1}{x})$ je souvislá a $\overline{M} = X$, takže podle 7.3 je celý X souvislý. Není však křivkově souvislý: body tvaru $(0,y)$ s body množiny M se křivkami spojit nedají.

7.9. Lokální souvislost. Řekneme, že prostor X je *lokálně souvislý* jestliže pro každý bod $x \in X$ a pro každé jeho okolí U existuje souvislé okolí $V \subseteq U$.

Příklad 7.8 ukazuje, že souvislý prostor nemusí být lokálně souvislý: malá okolí bodů tvaru $(0,y)$ souvislá okolí neobsahují. Poznamenejme, že intuici souvislosti odpovídají spíš prostory, které jsou zároveň souvislé a lokálně souvislé než prostory pouze souvislé. Čtenáři možná bude také připadat, že v příkladu 7.8 části $\{(0,y) \,|0 \le y \le 1\}$ a $\{(x, \sin\frac{1}{x}) \,|0 < x \le 1\}$ nedrží v geometrickém názoru příliš krásně pohromadě.

7.10. Totální a extremální nesouvislost. Ještě dva pojmy týkající se nesouvislosti. Bude se jednat o prostory geometricky ne zrovna nejzajímavější, ale hrající (zejména první z nich) významnou roli.

Prostor X je *totálně nesouvislý* jestliže pro každý bod $x \in X$ a pro každé jeho okolí U existuje obojetné okolí $V \subseteq U$. Prostor X je *extremálně nesouvislý* jestliže uzávěr libovolné otevřené množiny je otevřená (a tedy obojetná) množina.

Totálně nesouvislé prostory si snadno představíme. Například prostor racionálních čísel, nebo známé Cantorovo discontinuum jsou totálně nesouvislé. Netriviální příklady extremálně nesouvislých prostorů jsou již méně názorné. Abychom nějaký uvedli: snadno se ukáže, že Čechova-Stoneova kompaktifikace extremálně nesouvislého prostoru je opět prostor extremálně nesouvislý, tedy je extremálně nesouvislý každý $\beta(X)$ s diskretním X.

Kapitola VI

Metrické a uniformní prostory

1. Zopakování několika pojmů.

1.1. V první části této kapitoly se budeme zabývat několika speciálními vlastnostmi metrických prostorů. Některé z pojmů, které uvedeme (separabilita, hromadný bod a j.) mají obecnou topologickou platnost; zařazujeme je sem proto, že nás budou zvášť zajímat některé jejich aspekty v merickém kontextu.

Budeme se ale také zabývat pojmy, které jsou s metrikou svázány více, a nezachovávají se obecně při homeomorfismech. O takových pojmech říkáme, že *nejsou topologické*.

1.2. Připomeňme, že se v metrickém prostoru (X, ρ) zavádí vzdálenost bodu x od množiny $A \subseteq X$ předpisem

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, a) \mid a \in A\}$$

a že pro uzávěr platí

$$\overline{A} = \{x \mid \rho(x, A) = 0\}.$$

Následkem toho,

1.2.1 *podmnožina $A \subseteq X$ je hustá právě když ke každému $x \in X$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $a \in A$ takové, že $\rho(x, a) < \varepsilon$.*

1.3. *Diametr množiny A* je definován předpisem

$$\mathsf{diam} A = \sup\{\rho(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *omezený* jestliže $\mathsf{diam} X < +\infty$.

Platí

Tvrzení: $\mathsf{diam}\overline{A} = \mathsf{diam} A$.

Důkaz. Nechť $\mathsf{diam}\overline{A} > \mathsf{diam}A$. Zvolme $x, y \in \overline{A}$ tak aby $\rho(x,y) > \mathsf{diam}A + 2\varepsilon$. Když nyní zvolíme $x', y' \in A$ tak aby $\rho(x,x'), \rho(y,y') < \varepsilon$, dostaneme spor $\rho(x,y) \leq \rho(x,x') + \rho(x',y') + \rho(y',y) < \varepsilon + \mathsf{diam}A + \varepsilon$. $\square$

1.4. Připomeňme ještě kulová okolí bodů

$$\Omega(x,\varepsilon) = \{y \mid \rho(x,y) < \varepsilon\}.$$

Platí

Tvrzení: *1.* $\mathsf{diam}\Omega(x,\varepsilon) \leq 2\varepsilon$.

2. Je-li $\alpha < \beta$ *je* $\overline{\Omega(x,\alpha)} \subseteq \Omega(x,\beta)$.

Důkaz. První tvrzení je triviální. Buď nyní $y \in \overline{\Omega(x,\alpha)}$. Zvolme $z \in \Omega(x,\alpha)$ tak aby $\rho(z,z) < \beta - \alpha$. Potom $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) < \beta$. $\square$

1.5. Dále připomínáme, že posloupnost $(x_n)_n$ *konverguje* k bodu x jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ je $\rho(x_n, x) < \varepsilon$. Říkáme pak, že posloupnost $(x_n)_n$ je *konvergentní*, že x je její *limita*, a píšeme $x = \lim x_n$.

1.5.1. Pozorování. *Konverguje-li posoupnost* $(x_n)_n$ *k* x, *konverguje k témuž bodu i po libovolném přerovnání. To jest, pro libovolné vzájemně jednoznačné zobrazení* ϕ *množiny přirozených čísel* $\mathbb{N}$ *na sebe je opět* $\lim x_{\phi(n)} = x$.

(Skutečně, stačí vždy nahradit číslo n_0 z definice číslem n_1 dostatečně velkým tak aby $\{1, 2, \ldots, n_0\} \subseteq \phi[\{1, 2, \ldots, n_1\}]$.)

1.6. Cauchyovské posloupnosti. Posloupnost x_n, $n = 1, 2, \ldots$ v metrickém prostoru (X, ρ) je *Cauchyovská* jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \text{ takové, že } m, n \geq n_0 \ \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Zřejmě

každá konvergentní posloupnost je Cauchyovská.

Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *úplný* jestliže je v něm každá Cauchyovská posloupnost konvergentní.

1.7. Metriky ρ, σ na množině X jsou *silně ekvivalentní*, existují-li kladná čísla α, β taková, že pro všechna $x, y \in X$ je

$$\alpha \cdot \sigma(x,y) \leq \rho(x,y) \leq \beta \cdot \sigma(x,y).$$

Důležitý příklad. Buďte $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2)$ metrické prostory. Na množině $X = X_1 \times X_2$ definujme

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{\rho_1(x_1, y_1)^2 + \rho_2(x_2, y_2)^2}, \tag{1.7.ρ}$$
$$\sigma((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2), \tag{1.7.σ}$$
$$\mu((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(\rho_1(x_1, y_1), \rho_2(x_2, y_2)). \tag{1.7.μ}$$

Je snadno vidět, že všechny tři formule definují metriky na X, a že kterékoli dvě z nich jsou silně ekvivalentni. Tak dostáváme (ve třech variantách) *součin* (nebo *produkt*) daných metrických prostorů. Přesvědčte se, že je to v souladu s topologiemi: v příslušných topologiích podle V.5.4 dostaneme součin topologických prostorů.

1.7.1. Euklidovské prostory. Součin $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ n-krát budeme označovat

$$\mathbb{E}_n$$

a budeme o něm mluvit jako o n-rozměrném Euklidovském prostoru. Běžné euklidovské geometrii odpovídá metrika typu z formule (1.7.ρ); pro naše úvahy bude obvykle pohodlnější metrika z formule (1.7.μ).

1.8. Jednoduchý příklad na kterém je vidět kde co. Zobrazení

$$\phi = (x \mapsto \frac{2x-1}{1-|2x-1|}) : \mathbb{I}_0 = \rangle 0, 1 \langle = \{t \mid 0 < t < 1\} \to \mathbb{R},$$
$$\psi = (x \mapsto \frac{1+x+|x|}{2(1+|x|)}) : \mathbb{R} \to \mathbb{I}_0$$

jsou spojitá a vzájemně inversní. Tedy jsou $\mathbb{I}_0$ a $\mathbb{R}$ homeomorfní.

Vidíme tedy, že

- omezenost není topologický pojem: $\mathbb{I}_0$ omezený je a $\mathbb{R}$ omezený není;
- Cauchyovská posloupnost není topologický pojem: $(\frac{1}{n})_n$ v $\mathbb{I}_0$ je posloupnost $(\frac{1}{n})_n$ Cauchyovská, ale její homeomorfní obraz $(\phi(\frac{1}{n}) = 1-\frac{n}{2})_n$ není Cauchyovská v $\mathbb{R}$;
- úplnost není topologický pojem: $\mathbb{I}_0$ úplný není a $\mathbb{R}$ úplný je (viz příští oddíl).

Snadno ale vidíme, že všechny tyto pojmy se zachovávají při silně ekvivalentních metrikách. Zejména tedy budeme-li o nich mluvit u součinů, je jedno, kterou z nahoře uvedených metrik vezmeme.

2. Separabilita a totální omezenost

2.1. Topologický prostor je *separabilní*, existuje-li v něm (nejvýš) spočetná hustá podmnožina.

2.2. Věta. *Následující tvrzení o metrickém prostoru $X = (X, \rho)$ jsou ekvivalentní.*

(1) *X je separabilní.*

(2) *X má spočetnou basi otevřených množin.*

(3) *X je Lindelöfův.*

Důkaz. (1)⇒(2): Buď M spočetná hustá podmnožina. Položme

$$\mathcal{B} = \{\Omega(m, r) \mid m \in M,\ r \text{ racionální}\}.$$

Dokážeme, že $\mathcal{B}$ je base. Vezměme otevřenou U a $x \in U$ a $\varepsilon > 0$ takové, že $\Omega(x, \varepsilon) \subseteq U$. Nyní zvolme $m \in M$ tak, aby $\rho(x, m) < \frac{1}{3}\varepsilon$ a racionální r takové, že $\frac{1}{3}\varepsilon < r < \frac{2}{3}\varepsilon$. Potom $x \in \Omega(m, r) \subseteq \Omega(x, \varepsilon) \subseteq U$: skutečně, je-li $\rho(m, y) < r$, je $\rho(x, y) \leq \rho(x, m) + \rho(m, y) < (\frac{1}{3} + \frac{2}{3})\varepsilon = \varepsilon$.

(2)⇒(3): Buď $\mathcal{B}$ spočetná base a $\mathcal{U}$ libovolné otevřené pokrytí. Označme $\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} \mid \exists U \in \mathcal{U},\ B \subseteq U\}$. Potom je $\mathcal{B}'$ spočetné pokrytí, a vybereme-li pro každé $B \in \mathcal{B}'$ nějakou $U_B \in \mathcal{U}$ tak, aby $B \subseteq U_B$, je také $\{U_B \mid B \in \mathcal{B}'\}$ spočetné pokrytí.

(3)⇒(1): Pro každé kladné přirozené n vyberme z pokrytí $\{\Omega(x, \frac{1}{n}) \mid x \in X\}$ spočetné podpokrytí

$$\Omega(x_{n1}, \frac{1}{n}), \dots, \Omega(x_{nk}, \frac{1}{n}), \dots .$$

Potom je množina $\{x_{nk} \mid n, k = 1, 2, \dots\}$ hustá v X. □

Poznámka. V obecném topologickém kontextu platí jen (velmi snadné) implikace (2)⇒(3) a (2)⇒(1), nic víc.

2.2.1. Vlastnost (2) z Věty se zřejmě přenáší na libovolné podprostory. Máme tedy též

Důsledek. *Podprostor metrického separabilního prostoru je separabilní.*
Podprostor metrického Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.

(První z těchto tvrzení nijak nepřekvapí, a ostatně se dá snadno dokázat přímo. Druhé tvrzení ale možná trochu překvapující je: Lindelöfova vlastnost je velmi příbuzná kompaktnosti a ta se v podprostorech obecně nezachovává. V obecném topologickém kontextu neplatí ani jedno.)

2.3. Řekneme, že metrický prostor je *totálně omezený*, existuje-li pro každé $\varepsilon > 0$ konečná podmnožina $M(\varepsilon)$ taková, že

$$\text{pro každé } x \in X \text{ je } \rho(x, M(\varepsilon)) < \varepsilon. \tag{TO}$$

2.3.1. Pozorování. Každý totálně omezený metrický prostor je omezený, ale omezený prostor nemusí být totálně omezený.

(Máme $\mathsf{diam} X \le \mathsf{diam} M(1) + 2$. Na druhé straně, definujeme-li na nekonečné množině X metriku $\rho(x, y) = 1$ kdykoli $x \neq y$ je získaný prostor omezený, ale konečná $M(\frac{1}{2})$ neexistuje.)

2.3.2. Věta. *Podprostory a součiny totálně omezených prostorů jsou totálně omezené.*

Důkaz. I. Podprostory: Buďte $M(\varepsilon)$ množiny z (TO) pro prostor X, buď $Y \subseteq X$ podprostor. Pro $x \in M(\frac{1}{2}\varepsilon)$ zvolme $y(x) \in Y$ takové, že $\rho(x, y) < \frac{1}{2}\varepsilon$ pokud takové y existuje, jinak k x nevolme nic. Podle trojúhelníkové nerovnosti potom splňují

$$M'(\varepsilon) = \{y(x) \mid x \in M(\frac{1}{2}\varepsilon)\}$$

požadavek (TO) pro podprostor Y.

II. Součiny: V součinu $X = (X_1, \rho_1) \times (X_2, \rho_2)$ vezměme metriku μ z 1.7 a zvolme v (X_i, ρ_i) množiny $M_i(\varepsilon)$ podle (TO). Potom v X stačí vzít $M(\varepsilon) = M_1(\varepsilon) \times M_2(\varepsilon)$. $\square$

2.3.3. Věta. *Podprostor Euklidovského prostoru $\mathbb{E}_n$ je totálně omezený právě když je omezený.*

Důkaz. Protože každý omezený podprostor $\mathbb{E}_n$ se vejde do součinu omezených intervalů, stačí podle 2.3.2 dokázat, že každý omezený interval J je totálně omezený. Pro $\varepsilon > 0$ zvolme n tak aby $\frac{1}{n} < \varepsilon$ a položme

$$M(\varepsilon) = \{\frac{k}{n} \mid k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \cap J. \qquad \square$$

2.4. Věta. *Metrický prostor X je totálně omezený právě když z každé posloupnosti v X lze vybrat Cauchyovskou podposloupnost.*

Důkaz. I. Je-li X totálně omezený zvolme množiny $M(\frac{1}{n})$ podle definice. Je-li množina $\{x_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ konečná, obsahuje naše posloupnost konstantní podposloupnost, a ta je samozřejmě Cauchyovská. Jinak zvolme nejprve $m_1 \in M(1)$ tak aby $P_1 = P \cap \Omega(m_1, 1)$ byla nekonečná, a potom k_1 tak, aby $x_{k_1} \in P_1$. Jsou-li již zvoleny

$$m_j \in M(\frac{1}{j}),\ j = 1, \dots, n-1, \text{takové, že } P_j = P_{j-1} \cap \Omega(m_j, \frac{1}{j})$$
$$\text{jsou nekonečné, a } k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-1} \text{ takové, že } x_{k_j} \in P_j,$$

zvolme $m_n \in M(\frac{1}{n})$ tak aby $P_n = P_{n-1} \cap \Omega(m_1, 1)$ byla nekonečná, a $k_n > k_{n-1}$ tak, aby $x_{k_n} \in P_n$. Potom je posloupnost $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \dots$ zřejmě Cauchyovská.

II. Nechť X není totálně omezený. Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každou konečnou $M \subseteq X$ existuje $x \in X$ tak, že $\rho(x, M) > \varepsilon$. Zvolme libovolně bod x_1 a máme-li již body $x_1, \dots, x_n$ nalezeny zvolme x_{n+1} tak, aby $\rho(x_{n+1}, \{x_1, \dots, x_n\}) > \varepsilon$. Z takto získané posloupnosti zřejmě Cauchyovskou vybrat nelze. $\square$

2.5. Věta. *Každý totálně omezený prostor je separabilní.*
Důkaz. Stačí vzít $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M(\frac{1}{n})$ $\square$

2.5.1. V jednom s dalších oddílů se nám bude hodit jednoduchý důsledek tohoto faktu a vět 2.2 a 2.4:

Důsledek. *Je-li z každé posloupnosti v prostoru X možno vybrat konvergentní podposloupnost, je X Lindelöfův.*

3. Úplné metrické prostory.

Připomeňme si definice z 1.6. Platí

3.1.1. Lemma. *Posloupnost $(x_{11}, x_{21}), (x_{12}, x_{22}), (x_{13}, x_{23}), \dots$ v součinu $X_1 \times X_2$ je Cauchyovská právě když každá s posloupností $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots$ je Cauchyovská v X_i.*

Důkaz. Použijeme metriku z $(1.7.\mu)$. Nechť je

$$(x_{11}, x_{21}), (x_{12}, x_{22}), (x_{13}, x_{23}), \dots$$

Cauchyovská. Pro $\varepsilon > 0$ zvolme n_0 tak, aby pro $m, n > n_0$ bylo

$$\mu((x_{1m}, x_{2m}), (x_{1n}, x_{2n})) < \varepsilon.$$

Potom pro $m, n > n_0$ je $\rho_i(x_{im}, x_{in}) < \varepsilon$.

Buďte naopak obě $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots$ Cauchyovské. Zvolme n_i tak, aby pro $m, n > n_i$ bylo $\rho_i(x_{im}, x_{in}) < \varepsilon$. Potom pro $n_0 = \max(n_1, n_2)$ a $m, n > n_0$ je $\mu((x_{1m}, x_{2m}), (x_{1n}, x_{2n})) < \varepsilon$. $\square$

3.1.2. Důsledek. *Součin dvou úplných metrických prostorů je úplný prostor.*

3.2. Věta. *Podprostor $Y \subseteq X$ úplného prostoru je úplný právě když Y je uzavřená podmnožina v X.*

Důkaz. Buď Y uzavřená podmnožina v X a buď $y_1, y_2, \dots$ Cauchyovská v Y a tedy i v X. Tam má limitu y, vzhledem k uzavřenosti Y je $y \in Y$.

Nechť Y není uzavřená. Potom v ní existuje posloupnost $y_1, y_2, \dots$ která má limitu v $X \setminus Y$. Jelikož je $y_1, y_2, \dots$ konvergentní v X, je Cauchyovská, a taková je i v Y, protože tam jsou stejné vzdálenosti; v Y ale limitu nemá. $\square$

3.3.1. Pozorování. *Každá Cauchyovská posloupnost tvoří omezenou množinu.*

(Zvolme n_0 tak aby pro $m, n \geq n_0$ bylo $\rho(x_m, x_n) < 1$ a položme $d = \max\{\rho(x_m, x_n)\ |m, n \leq n_0\}$. Potom je pro libovolná m, n, $\rho(x_m, x_n) < d+2$.)

3.3.2. Lemma. *Z každé omezené posloupnosti reálných čísel je možno vybrat konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Je-li $x_1, x_n, \dots$ omezená posloupnost, je množina

$$M = \{r \in \mathbb{R} \mid x_m > r \text{ pro nekonečně mnoho indexů } m\}$$

omezená a neprázdná a má tedy konečné supremum s. Pro každé k podle definice množiny M existuje nekonečně mnoho indexů n takových, že

$$s - \frac{1}{k} < x_n < s + \frac{1}{k}.$$

Zvolme n_1 tak aby $s - 1 < x_{n_1} < s + 1$ a pak induktivně n_k tak aby $n_{k+1} > n_k$ a $s - \frac{1}{k} < x_{n_k} < s + \frac{1}{k}$. Získaná posloupnost $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots$ potom konverguje k s. $\square$

3.3.3. Věta. *Reálná přímka $\mathbb{R}$ je úplný prostor. Následkem toho jsou všechny uzavřené podprostory euklidovských prostorů úplné.*

(První z tvrzení je slavná věta Bolzano-Cauchyova.)

Důkaz. První tvrzení dostaneme bezprostředně z 3.3.1 a 3.3.2, druhé je pak důsledkem vět 3.1 a 3.2. $\square$

3.4. Řídké množiny a množiny první kategorie. Připomeňte si definici husté podmnožiny, t.j. takové $M \subseteq X$, že $\overline{M} = X$ (viz V.3.2). Podobně názorný je pojem *řídké* podmnožiny: jedná se o takovou podmnožinu $M \subseteq X$, že doplněk jejího uzávěru je hustá množina, t.j., že

$$\overline{X \setminus \overline{M}} = X$$

(uvědomte si, že vlastnost "doplněk husté množiny" nemá valný smysl).

Množina první kategorie je sjednocení spočetně mnoha řídkých množin. Ta může, na rozdíl od řídkých množin, zaplňovat velkou část prostoru – třeba racionální přímka je celá první kategorie. U úplných prostorů se to však nikdy nestane. Platí

Věta. (Baireova věta) *Žádný úplný prostor není první kategorie v sobě.*

Důkaz. Buďte A_n, $n = 1, 2, \ldots$ řídké v X, tedy $X \setminus \overline{A}_n$ husté. Množina $X \setminus \overline{A}_1$ je hustá otevřená; tedy můžeme zvolit

$$\text{otevřenou } U_1 \neq \emptyset \text{ tak, aby } B_1 = \overline{U}_1 \subseteq X \setminus A_1 \text{ a } \mathsf{diam} B_1 < 1 \qquad (*)$$

(třeba $U_1 = \Omega(x, \varepsilon)$ pro nějaké $x \in X \setminus \overline{A}_1$ a dost malé ε – viz 1.3 a 1.4). Mějme nyní nalezeny neprázdné otevřené $U_1, \ldots, U_n$ takové, že $U_{k+1} \supseteq \overline{U}_k = B_k$ a $\mathsf{diam} B_k < \frac{1}{k}$. Potom je $(X \setminus \overline{A}_{n+1}) \cap U_n$ neprázdná otevřená množina a můžeme zvolit

$$\text{otevřenou } U_{n+1} \neq \emptyset \text{ tak aby } B_{n+1} = \overline{U}_{n+1} \subseteq X \setminus A_{n+1} \text{ a } \mathsf{diam} B_{n+1} < \frac{1}{n+1}$$

(třeba zase $\Omega(x, \varepsilon)$ pro nějaké $x \in (X \setminus \overline{A}_{n+1}) \cap U_n$ a dost malé ε). Dostáváme posloupnost neprázdných uzavřených množin $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots$ takových, že

- $\mathsf{diam} B_n < \frac{1}{n}$, a
- $B_n \subseteq X \setminus A_n$.

V B_n zvolme bod b_n. Potom pro $k \geq n$ je $b_k \in B_n$ a tedy je posloupnost $b_1, b_2, b_3, \ldots$ Cauchyovská a má limitu b. Jelikož $\{b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots\} \subseteq B_n$ a B_n je uzavřená, je $b \in B_n$ a tedy

$$b \in \bigcap B_n \subseteq \bigcap (X \setminus A_n) = X \setminus \bigcup A_n.$$

Tedy $\bigcup A_n \neq X$. $\square$

3.5. Zúplnění metrického prostoru. Označme $\mathcal{C}(X,\rho)$ množinu všech Cauchyovských posloupností v prostoru (X,ρ). Pro $(x_n)_n,(y_n)_n \in \mathcal{C}(X,\rho)$ položme

$$\rho'((x_n)_n,(y_n)_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n).$$

(Tato limita existuje: Zvolíme-li pro $\epsilon > 0$ číslo n_0 tak aby pro $m,n \geq n_0$ bylo $\rho(x_n,x_m) < \frac{\epsilon}{2}$ a $\rho(y_n,y_m) < \frac{\epsilon}{2}$, máme $\rho(x_n,y_n) \leq \rho(x_n,x_m) + \rho(x_m,y_m) + \rho(y_n,y_m) < \epsilon + \rho(x_m,y_m)$ takže $|\rho(x_n,y_n) - \rho(x_m,y_m)| < \epsilon$ – absolutní hodnota protože pořadí m,n můžeme obrátit; posloupnost $(\rho(x_n,y_n))_n$ je tedy Cauchyovská.) Bezprostředně vidíme, že

- $\rho'(p,q) \geq 0$ a $\rho'(p,p) = 0$,
- $\rho'(p,q) = \rho'(q,p)$, a
- $\rho'(p,r) \leq \rho'(p,q) + \rho'(q,r)$.

(Funkcím s těmito vlastnostmi se říká *pseudometriky*; od metrik se liší jen tím, že $\rho'(p,q)$ může být nula i když $p \neq q$.)

Definujme nyní

$$(x_n)_n \sim (y_n)_n \quad \text{jestliže} \quad \rho'((x_n)_n,(y_n)_n)$$

a na množině $\widetilde{X}$ tříd ekvivalence (budeme je označovat $[(x_n)_n]$) zaveďme

$$\widetilde{\rho}([(x_n)_n],[(y_n)_n]) = \rho'((x_n)_n,(y_n)_n)$$

(tato definice nezávisí na výběru representantů: je-li $p \sim p'$ a $q \sim q'$ je $\rho'(p',q') \leq \rho'(p',p) + \rho'(p,q) + \rho'(q,q') = \rho'(p,q)$).

Tím jsme dostali metrický prostor

$$(\widetilde{X},\widetilde{\rho}).$$

3.5.1. Lemma. *Zobrazení $\iota = (x \mapsto \widetilde{x} = [(x,x,x,\dots)]$ je (isometrické) vložení prostoru (X,ρ) do prostoru $(\widetilde{X},\widetilde{\rho})$. Obrax $\iota[X]$ je v $(\widetilde{X},\widetilde{\rho})$ hustý.*

Důkaz. První tvrzení je triviální: z definice dostaneme okamžitě $\widetilde{\rho}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \rho(x,y)$.

Buď nyní $[(x_n)_n] \in \widetilde{X}$ a $\epsilon > 0$. Zvolme n_0 takové, že pro $m,n \geq n_0$ je $\rho(x_n,x_m) < \epsilon$. Potom je $\widetilde{\rho}([(x_n)_n],\widetilde{x}_{n_0}) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_m,x_{n_0}) \leq \epsilon$. $\square$

3.5.2. Lemma. *$(\widetilde{X},\widetilde{\rho})$ je úplný metrický prostor.*

Důkaz. Buď $([p_n])_n$ Cauchyovská posloupnost v $(\widetilde{X},\widetilde{\rho})$. Podle 3.5.1 můžeme zvolit $x_n \in X$ takové, že $\widetilde{\rho}([p_n],\widetilde{x}_n) < \frac{1}{n}$. Z trojúhelníkové nerovnosti snadno zjistíme, že $p = (x_n)_n$ je Cauchyovská posloupnost. Representujme $[p_n]$ posloupnostmi $(y_{nk})_k$, takže máme

$$\widetilde{\rho}([p_n],[p]) = \lim_{k\to\infty} \rho(y_{nk},x_k).$$

Víme, že $\widetilde{\rho}([p_n],\widetilde{x}_n) = \lim_{k\to\infty} \rho(y_{nk},x_n) < \frac{1}{n}$. Tedy máme

$$\rho(y_{nk},x_k) \le \rho(y_{nk},x_n) + \rho(x_n,x_k) < \frac{1}{n} + \rho(x_n,x_k)$$

a volíme-li n_0 tak, aby bylo $\frac{1}{n_0} \le \frac{\epsilon}{2}$ a aby pro $k,n \ge n_0$ bylo $\rho(x_k,x_n) < \frac{\epsilon}{2}$, vidíme, že $\rho(y_{nk},x_k) < \epsilon$ a tedy $\widetilde{\rho}([p_n],[p]) \le \epsilon$. $\square$

Shrnutím těchto dvou lemmat je

3.5.3. Věta. *Každý metrický prostor se dá vložit jako hustý podprostor do úplného metrického prostoru.*

4. Kompaktní metrické prostory.

Čtenář si možná z kursu matematické analysy pamatuje trochu jinou definici kompaktnosti než tu, se kterou se zde setkal v páté kapitole, totiž že metrický prostor je kompaktní, jestliže se z každé posloupnosti dá vybrat konvergentní podposloupnost. V první části tohoto oddílu ukážeme, že tato vlastnost je v metrických prostorech opravdu ekvivalentní vlastnosti z definice obecné. Bude to slavná Heine-Borelova věta; dokážeme ji v trochu obecnější podobě (4.3 dole).

4.1. Buď M nekonečná podmnožina obecného topologického prostoru X. Řekneme, že bod $x \in X$ je

- *hromadný bod* množiny M jestliže pro každé okolí U bodu x je množina $M \cap U$ nekonečná, a
- *bod kondensace* množiny M jestliže pro každé okolí U bodu x má množina $M \cap U$ stejnou mohutnost jako M.

4.1.1. Lemma. *Buď M nekonečná podmnožina T_1-prostoru X. Potom nísledující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(1) *x je hromadný bod množiny,*

(2) *$x \in \overline{M \setminus \{x\}}$,*

(3) *pro každé okolí U bodu x je množina $M \cap (U \setminus \{x\})$ neprázdná.*

Důkaz. Triviálně (1)$\Rightarrow$(3)$\Leftrightarrow$(2).

(3)$\Rightarrow$(1): Vyberme $x_1 \in U \cap (M \setminus \{x\})$ a pak indukcí $x_{n+1} \in U \cap (X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \cap (M \setminus \{x\})$. $\square$

4.1.2. Lemma. *V metrickém prostoru je x hromadným bodem množiny M právě když v $M \setminus \{x\}$ existuje posloupnost $(x_n)_n$ taková, že $\lim x_n = x$.*

Důkaz. $\Rightarrow$: Vyberme x_1 libovolně a jsou-li již $x_1, \dots, x_n$ vybrány zvolme $x_{n+1} \in \Omega(x, \frac{1}{n}) \cap (X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \cap (M \setminus \{x\})$. Získaná posloupnost konverguje k x.

$\Leftarrow$: Existuje-li taková posloupnost, je zřejmě $x \in \overline{M \setminus \{x\}}$. $\square$

4.2. Lemma. *V metrickém prostoru má každá nekonečná množina hromadný bod právě když lze z každé posloupnosti vybrat posloupnost konvergentní.*

Důkaz. $\Rightarrow$: Pokud je množina $M = \{x_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ konečná, dá se z $(x_n)_n$ vybrat konstantní posloupnost. Je-li nekonečná, má hromadný bod x a k němu konverguje nějaká posloupnost bodů z M. Podle 1.5.1 tato posloupnost konverguje k x i v pořadí shodném s pořadím původní posloupnosti.

$\Leftarrow$: Je-li M nekonečná, dá se v ní najít prostá posloupnost, a tedy i konvergentní prostá posloupnost. $\square$

4.3. Věta. ((Rozšířená) věta Heine-Borelova) *Buď X topologický prostor. Potom jsou ekvivalentní následující tvrzení:*

(1) *X je kompaktní.*

(2) *Každá nekonečná množina v X má bod kondensace.*

Je-li X metrický, jsou tato tvrzení dále ekvivalentní s tvrzeními:

(3) *Každá nekonečná množina v X má hromadný bod.*

(4) *Z každé posloupnosti v X lze vybrat posloupnost konvergentní.*

Poznámka. V následujícím důkazu budeme používat fakta z teorie množin (viz I.4): to, že sjednocení konečně mnoha nekonečných množin má mohutnost největší z nich, a Zermelovu větu podle které je každou množinu možno (dobře) uspořádat podle vhodného kardinálu. Bez toho to nejde, ekvivalence definic kompaktnosti jsou závislé na výběrových principech.

Důkaz. (1)⇒(2): Důkaz provedeme sporem. Nechť je X kompaktní a nechť nekonečná množina $M \subseteq X$ nemá v X bod kondensace. Pro každý bod $x \in X$ tedy existuje otevřená $U_x \ni x$ taková, že mohutnost $|U_x \cap M|$ je menší než $|M|$. Z pokrytí $\{U_x \mid x \in X\}$ vyberme konečné $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}$. Dostáváme spor

$$|M| = |M \cap \bigcup_{j=1}^{n} U_{x_j}| = |\bigcup_{j=1}^{n}(M \cap U_{x_j})| = \max |M \cap U_{x_j}| < |M|.$$

(2)⇒(3) triviálně a (3)⇔(4) podle 4.2.

(2)resp.(3)⇒(1): Nechť každá nekonečná množina má bod kondensace, nebo nechť X je metrický a každá nekonečná množina má hromadný bod (o tomto druhém případě budeme mluvit jako o *metrické variantě*).

Pokračovat budeme opět sporem. Nechť X není kompaktní. Buď κ nejmenší kardinální číslo takové, že existuje pokrytí $\mathcal{U}$ mohutnosti κ takové, že z něj nelze vybrat podpokrytí mohutnosti menší.

> (**Důležitá poznámka**: V metrické variantě je $\kappa = \omega = \{0, 1, 2, \dots\}$, nejmenší nekonečný kardinál, protože podle 2.5.1 je X Lindelöfův.)

Seřaďme $\mathcal{U}$ do transfinitní posloupnosti $(U_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ (v metrické variantě do posloupnosti $U_0, U_1, U_2, \dots$). Z této posloupnosti nyní vyloučíme množiny, které jsou v daném pořadí zbytečné. Označíme jako V_0 první neprázdnou U_α a jsou-li již V_α nalezeny pro $\alpha < \beta < \kappa$ označme za V_β první U_γ která není obsažena v $\bigcup_{\alpha<\beta} V_\alpha$. Čeho jsme dosáhli:

- V_α tvoří opět pokrytí (vylučovali jsme jen množiny, které již byly pokryty jinými, nevyloučenými);
- proces se před κ nezastaví, jinak bychom měli podpokrytí menší mohutnosti,
- a pro každé $\alpha < \kappa$ můžeme zvolit $x_\alpha \in V_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$

Vezměme nyní množinu $M = \{x_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ (v metrickém případě $M = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$). Protože pro $\alpha < \beta$ nemůže být $x_\beta \in V_\alpha$ jsou všechny x_α různé a máme $|M| = \kappa$. Buď x bod kondensace (v metrickém případě hromadný bod) množiny M. Musí ležet v některé (otevřené) V_α a tedy by mělo být $|V_\alpha \cap M| = \kappa$. Jenomže množina V_α obsahuje jen x_β s $\beta \leq \alpha$ a těch je méně (v metrickém případě jen konečně mnoho). $\square$

4.4. Věta. *Metrický prostor je kompaktní právě když je úplný a totálně omezený.*

Důkaz. Je-li X kompaktní, je totálně omezený podle 2.4: konvergentní posloupnost je Cauchyovská. Buď nyní $(x_n)_n$ Cauchyovská posloupnost v X. Vyberme z ní podposloupnost $(x_{n_k})_k$ konvergující k nějakému x. Z trojúhelníkové nerovnosti snadno vidíme, že potom k x konverguje celá $(x_n)_n$.

Je-li X totálně omezený a úplný a je-li $(x_n)_n$ posloupnost v X, můžeme z ní vybrat Cauchyovskou podle 2.4, a ta podle úplnosti konverguje. $\square$

Z 2.3.3, 3.2 a 3.3.3 okamžitě získáme

4.4.1. Důsledek. *Podprostor euklidovského prostoru je kompaktní právě když je uzavřený a omezený.*

4.4.2. Poznámka. Všimněte si toho, že ve větě 4.4 máme topologickou vlastnost, kompaktnost, jako konjunkci dvou vlastností, které topologické nejsou.

5. Uniformita, stejnoměrná spojitost

V tomto odstavci předvedeme, ve dvou ekvivalentních podobách, strukturu, která dovoluje zachytit v obecnějším kontextu pojem stejnoměrné spojitosti jak ji znáte jistě u reálných funkcí, a pravděpodobně i ze základů metrických prostorů.

Půjde zde zatím jen o popis struktury. Co je uniformní prostor si povíme v dalším odstavci. Na pozdější dobu necháváme též vztah metrik a uniformit, třebaže motivace od metrických prostorů začíná.

5.1. Uniformita I. Diagonálu v kartézském součinu $X \times X$ budeme označovat (jako již dříve) symbolem Δ (tedy, $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$).

Uniformitou ve smyslu I na množině X rozumíme neprázdnou soustavu $\mathcal{U}$ podmnožin $U \subseteq X \times X$ takovou, že

(U_I0) průnik všech U z $\mathcal{U}$ je Δ,

(U_I1) je-li $U \in \mathcal{U}$ s $U \subseteq V$, je $V \in \mathcal{V}$,

(U_I2) jsou-li $U, V \in \mathcal{U}$ je $U \cap V \in \mathcal{U}$,

(U_I3) je-li $U \in \mathcal{U}$ je $U^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in U\} \in \mathcal{U}$,

(U_I4) ke každému $U \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{U}$ takové, že $V \circ V \subseteq V$.

Jsou-li $\mathcal{U}$ resp. $\mathcal{V}$ uniformity na množinách X resp. Y řekneme, že zobrazení $f : X \to Y$ je *stejnoměrně spojité* vzhledem k $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ jestliže

$$\text{pro každé } V \in \mathcal{V} \text{ existuje } U \in \mathcal{U} \text{ takové, že } (f \times f)[U] \subseteq V.$$

Místo s uniformitami je často pohodlnější pracovat s *basemi uniformit*, kde požadujeme (U_I0),

(U'_I2) jsou-li $U, V \in \mathcal{U}$ existuje $W \in \mathcal{U}$ takové, že $W \subseteq U \cap V$,

(U'_I3) je-li $U \in \mathcal{U}$ existuje $W \in \mathcal{U}$ takové, že $W \subseteq U^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in U\}$

a (U_I4) (totiž, vynecháme (U_I1) a slevíme podle toho v dalších podmínkách). Z base samozřejmě dostaneme uniformitu přidáním všech $V \supseteq U \in \mathcal{U}$. Všimněte si, že jsme v definici stejnoměrné spojitosti práci s basemi předjímali: u uniformit by ovšem bylo možno místo "...existuje $U \in \mathcal{U}$ takové, že platí $(f \times f)[U] \subseteq V$" žádat jednodušeji rovnou "...$(f \times f)^{-1}[V] \in \mathcal{U}$".

Důležitá base uniformity $\mathcal{U}$ je

$$\mathcal{U}^\sigma = \{U \in \mathcal{U} \mid U^{-1} = U\}$$

(což je $\{U \cap U^{-1} \mid U \in \mathcal{U}\}$; dokažte jako jednoduché cvičení, že všechny požadavky jsou splněny). Několikrát ji použijeme.

5.2. Uniformita II. Na rozdíl od předchozího bude v tomto odstavci *pokrytí* množiny X soustava $\mathcal{A}$ libovolných (ne nutně otevřených) množin taková, že $\bigcup \mathcal{A} = X$. Říkáme, že pokrytí $\mathcal{A}$ *zjemňuje* pokrytí $\mathcal{B}$ a píšeme

$$\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$$

jestliže ke každému $A \in \mathcal{A}$ existuje $B \in \mathcal{B}$ takové, že $A \subseteq B$. Označujeme dále

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = \{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$$

(uvědomte si. že je to společné zjemnění pokrytí $\mathcal{A}$ a BC). Pro libovolnou podmnožinu $M \subseteq X$ pišme

$$M * \mathcal{A} = \bigcup \{A \in \mathcal{A} \,|M \cap A \neq \emptyset\}$$

Položme

$$\mathcal{A}^* = \{x * \mathcal{A} \,|x \in X\} \quad \text{kde} \quad x * \mathcal{A} = \{x\} * \mathcal{A}.$$

Často budeme používat zřejmou formuli

$$\mathcal{A}^* \leq \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad (x * \mathcal{A}) * \mathcal{A} \subseteq x * \mathcal{B}.$$

Je-li $\mathcal{A}^* \leq \mathcal{B}$ mluví se o $\mathcal{A}$ často jako o *hvězdovitém zjemnění* pokrytí $\mathcal{B}$.

Uniformitou ve smyslu II na množině X rozumíme neprázdný systém $\mathfrak{A}$ pokrytí množiny X takový, že

($\mathrm{U}_{II}0$) je-li $x \neq y$ existuje $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ takové, že $x \notin y * \mathcal{A}$,

($\mathrm{U}_{II}1$) je-li $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ s $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, je $\mathcal{B} \in \mathfrak{A}$,

($\mathrm{U}_{II}2$) jsou-li $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{A}$ je $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \in \mathfrak{A}$,

($\mathrm{U}_{II}3$) ke každému $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ existuje $\mathcal{B} \in \mathfrak{A}$ takové, že $\mathcal{B}^* \leq \mathcal{A}$.

Analogicky s předchozím mluvíme o *basi uniformity* u systémů splňujících ($\mathrm{U}_{II}0$), ($\mathrm{U}'_{II}3$) a

($\mathrm{U}'_{II}2$) každé dvě $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{A}$ mají v $\mathfrak{A}$ společné zjemnění.

Snadno vidíme, že je-li $\mathcal{A}_i \leq \mathcal{B}_i$ je $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \leq \mathcal{B}_1 \wedge \mathcal{B}_2$, a je-li $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ je $\mathcal{A}^* \leq \mathcal{B}^*$. Dostaneme tedy uniformitu z base přidáním všech pokrytí, které v basi mají nějaké zjemnění.

Jsou-li $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{B}$ uniformity na množinách X resp. V řekneme, že zobrazení $f : X \to Y$ je *stejnoměrně spojité* vzhledem k $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ jestliže

$$\text{pro každé } \mathcal{B} \in \mathfrak{B} \text{ je } \{f^{-1}[B] \,|B \in \mathcal{B}\} \in \mathfrak{A}.$$

V případě basí musíme tuto podmínku formulovat opatrněji:

$$\text{pro každé } \mathcal{B} \in \mathfrak{B} \text{ existuje } \mathcal{A} \in \mathfrak{A} \text{ takové, že } \mathcal{A} \leq \{f^{-1}[B] \,|B \in \mathcal{B}\}.$$

5.3. Pro uniformitu $\mathcal{U}$ ve smyslu I definujme uniformitu $\mathfrak{A}$ ve smyslu II basí

$$\mathfrak{A}_0 = \{\{xU \mid x \in X\} \mid U \in \mathcal{U}\}$$

(xU je $\{y \mid xUy\}$). Ukážeme, že se opravdu jedná o basi uniformity. ($\mathrm{U}_{II}0$) plyne okamžitě z (U_I0). Jsou-li $U, V \in \mathcal{U}$ máme $U \cap V \in \mathcal{U}$ a pro $x \in X$ je $x(U \cup V) = xU \cup xV$ a tedy

$$\{x(U \cap V) \mid x \in X\} \leq \{xU \mid x \in X\} \wedge \{xV \mid x \in X\}.$$

Zvolíme-li k $U \in \mathcal{U}$ takové $V \in \mathcal{U}^\sigma$ že $V \circ V \subseteq U$ máme pro každé x

$$x * \{yV \mid y \in X\} \subseteq x(V \circ V)$$

a tedy $\{xV \mid x \in X\}^* \leq \{x(V \circ V) \mid x \in X\} \leq \{xU \mid x \in X\}$.

Naopak pro pokrytí $\mathcal{A}$ definujme

$$U_\mathcal{A} = \{(x, y) \mid \exists A \in \mathcal{A},\ x, y \in A\}$$

a pro uniformitu $\mathfrak{A}$ ve smyslu II definujme uniformitu $\mathcal{U}$ ve smyslu I basí

$$\mathcal{U}_0 = \{U_\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \in \mathfrak{A}\}.$$

Opět ovšem musíme ukázat, že se skutečně jedná o basi. Je-li $x \neq y$ vezměme $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ takové, že $y \notin x * \mathcal{A}$; potom $(x, y) \notin U_\mathcal{A}$ a tedy $(x, y) \notin \bigcap \mathcal{U}_0$. Jsou-li $A_i \in \mathcal{A}_i$ a $x, y \in A_1 \cap A_2$, je $x, y \in A_1$ i $x, y \in A_2$ a tedy

$$U_{\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2} \subseteq U_{\mathcal{A}_1} \cap U_{\mathcal{A}_2}.$$

Konečně zvolme pro $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ pokrytí $\mathcal{B} \in \mathfrak{A}$ takové, že $\mathcal{B}^* \leq \mathcal{A}$. Buďte $(x, y), (y, z) \in U_\mathcal{B}$. Máme tedy $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ takové, že $x, y \in B_1$ a $y, x \in B_2$, takže $x, z \in y * \mathcal{B} \subseteq A$ pro vhodné $A \in \mathcal{A}$. Je tedy $U_\mathcal{B} \circ U_\mathcal{B} \subseteq U_\mathcal{A}$.

Tvrzení. *Právě popsané konstrukce dávají vzájemně jednoznačný vztah mezi uniformitami ve smyslu I a II.*

Důkaz. K uniformitě $\mathcal{U}$ zkonstruujme $\mathfrak{A}$ podle prvního předpisu a k té pak $\mathcal{U}'$ podle druhého. Je-li $U \in \mathcal{U}$ zvolme $V \in U^\sigma$ tak, aby $V \circ V \subseteq U$. Potom je $\mathcal{A} = \{xV \mid x \in X\} \in \mathfrak{A}$ a

$$U_\mathcal{A} = \{(x, y) \mid \exists z,\ x, y \in zV\} \subseteq V \circ V \subseteq U,$$

a tedy $U \in \mathcal{U}'$. Je-li $U \in \mathcal{U}'$ máme pro nějaké $V \in \mathcal{U}$

$$\{(x,y)\ |\exists z,\ x,y \in zV\} \subseteq U.$$

Jelikož $x \in xV$ je $V \subseteq \{(x,y)\ |\exists z,\ x,y \in zV\}$, tedy $V \subseteq U$ a konečně $u \in \mathcal{U}$.

Nyní naopak k $\mathfrak{A}$, uniformitě ve smyslu II, vytvořme $\mathcal{U}$ a k té pak $\mathfrak{A}'$. Je-li $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ zvolme $\mathcal{B} \in \mathfrak{A}$ takové, že $\mathcal{B}^* \leq \mathcal{A}$. Potom

$$zU_{\mathcal{B}} = \{y\ |\exists B \in \mathcal{B},\ z,y \in B\} \subseteq z * \mathcal{B}$$

a tedy $\{zU_{\mathcal{B}}\ |z \in X\} \leq \mathcal{B}^* \leq \mathcal{A}$ a $\mathcal{A}$ je v $\mathfrak{A}'$. Je-li $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}'$ je $\{xU_{\mathcal{B}}\ |x \in X\} \leq \mathcal{A}$ pro nějaké $\mathcal{B} \in \mathcal{A}$. Zvolíme-li $B \in \mathcal{B}$ a libovolné $x \in B$ máme $B \subseteq xU_{\mathcal{B}}$, takže $\mathcal{B} \subseteq \{xU_{\mathcal{B}}\ |x \in X\} \leq \mathcal{A}$ a $\mathcal{A}$ je v $\mathfrak{A}$. □

5.4. Struktury definované v 5.1 a 5.2 jsou tedy ve vzájemně jednoznačném vztahu. Nyní uvidíme, že jsou ekvivalentní v mnohem silnějším smyslu.

Věta. *Buďte $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ uniformity ve smyslu II vytvořené k uniformitám $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ ve smyslu I podle předpisu z předchozího odstavce. Potom je zobrazení $f : (X,\mathfrak{A}) \to (Y,\mathfrak{B})$ stejnoměrně spojité právě když je stejnoměrně spojité $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$.*

Důkaz. Buď $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ stejnoměrně spojité. Buď $\{yV\ |y \in V\} \leq \mathcal{B}$ pro nějaké $V \in \mathcal{V}$. Nechť pro $U \in \mathcal{U}$ platí $(f \times f)[U] \subseteq V$. Položme $\mathcal{B} = \{xU\ |x \in X\}$. Jelikož pro xUy je $f(x)Vf(y)$ máme $y \in f^{-1}[f(x)V]$ takže $xU \subseteq f^{-1}[f(x)V]$ a konečně $\mathcal{B} \leq \{f^{-1}[A]\ |a \in \mathcal{A}\}$.

Buď $f : (X,\mathfrak{A}) \to (Y,\mathfrak{B})$ stejnoměrně spojité. Pro $V \in \mathcal{V}$ zvolme $V' \in \mathcal{V}^\sigma$ takové. že $V' \circ V' \subseteq V$. Existuje $U \in \mathcal{U}$ takové, že $\{xU\ |x \in X\} \leq \{f^{-1}[yV']\ |y \in Y\}$. Je-li xUz je $x,z \in xU \subseteq f^{-1}[yV']$ pro nějaké y; tedy $yV'f(x)$ a $yV'f(z)$ a konečně $f(x)Vf(z)$. □

5.5. Poznámka. Uniformity prvního typu pochází od Weila, autorem druhého přístupu je Tukey. Třebaže se druhý přístup zdá být trochu nepohodlný (struktura je dána množinou množin podmnožin), je dost názorný: na jednotlivá pokrytí z takové uniformity se můžeme dívat jako na aproximace bodů, a to podobně přesné ať jsme v prostoru kdekoli (v metrickém prostoru – tady trochu předbíháme – si představujte pokrytí $\{\Omega(x,\epsilon)\ |x \in X\}$ pro různá ϵ, jak přesně bychom zrovna chtěli mít body aproximovány; Weilův přístup si představujte jako stanovení stejnoměrných okolí diagonály). Všechny další úvahy již budeme provádět v tomto kontextu.

Nicméně, Weilův přístup má jednu velkou výhodu, kterou zde ale nedoceníme: dovoluje užitečné zobecnění vynecháním požadavku symetrie. V dalším odstavci uvidíme, že uniformity tak jak je zde uvažujeme vedou k úplné regularitě. Je trochu překvapující fakt, že nesymetrickou Weilovu uniformitu je možno zavést na jakémkoli topologickém prostoru.

6. Uniformní prostory. Uniformita a topologie

6.1. *Uniformním prostorem* budeme rozumět dvojici $(X, \mathfrak{A})$ kde $\mathfrak{A}$ je uniformita na množině X. Ze značení tušíte, že budeme dávat přednost popisu uniformity podle 5.2 (dále si to ještě trochu upravíme).

6.1.1. Buď $(X, \mathfrak{A})$ uniformní prostor, $Y \subseteq X$. Podprostorem prostoru $(X, \mathfrak{A})$ (neseným podmnožinou Y) rozumíme

$$(Y, \mathfrak{A}|Y)$$

kde $\mathfrak{A}|Y = \{\mathcal{A}|Y = \{A \cap Y \ |A \in \mathcal{A}\} \ |\mathcal{A} \in \mathfrak{A}\}$. Ověřit, že $\mathfrak{A}|Y$ je opravdu uniformita je velmi snadné.

6.1.2. Jsou-li $(X_i, \mathfrak{A}_i)$, $i \in J$, uniformní prostory definujeme na kartézském součinu $\prod_{i\in J} X_i$ (s projekcemi $p_i : \prod_{j\in J} X_j \to X_i$) uniformitu $\mathfrak{A}$ basí

$$\{\{p_{i_1}^{-1}[A] \ |A \in \mathcal{A}_{i_1}\} \wedge \cdots \wedge \{p_{i_n}^{-1}[A] \ |A \in \mathcal{A}_{i_n}\} \ |i_1, \ldots, i_n \in J, \ \mathcal{A}_{i_k} \in \mathfrak{A}_{i_k}\}.$$

Ověřit, že se jedná o basi uniformity je opět velmi snadné (jen je víc práce s indexy); je to možno ponechat čtenáři jako cvičení.

Získaný uniformní prostor se nazývá *součin* nebo *produkt* dan0ho systému Bezprostředně vidíme, že projekce jsou při tom stejnoměrně spojité. Jako cvičení může čtenář formulovat a dokázat analogii věty V.4.2.2.

6.2. Topologie z uniformity. Buď $(X, \mathfrak{A})$ uniformní prostor. Podmnožinu $U \subseteq X$ prohlásíme za *otevřenou* jestliže

$$\forall x \in U \ \exists \mathcal{A} \in \mathfrak{A}, \quad x * \mathcal{A} \subseteq U.$$

Snadno ověříme, že se tak získá topologie (k důkazu, že průniky otevřených množin jsou otevřené použijte snadné formule $(x*\mathcal{A}_1)\cap(x*\mathcal{A}_2)\subseteq x*(\mathcal{A}_1\wedge\mathcal{A}_2)$). Označíme ji

$$\tau(\mathfrak{A}).$$

Řekneme, že topologický prostor (X,τ) je *uniformisovatelný* existuje-li uniformita $\mathfrak{A}$ taková, že $\tau=\tau(\mathfrak{A})$.

6.2.1. Tvrzení. *Stejnoměrně spojité zobrazení* $f:(X,\mathfrak{A})\to(Y,\mathfrak{B})$ *je spojité vzhledem k* $\tau(\mathfrak{A}),\tau(\mathfrak{B})$.

Důkaz. Buď $V\subseteq Y$ otevřená, $x\in f^{-1}[V]$. Potom $f(x)\in V$ a tedy je $f(x)*\mathcal{B}\subseteq V$ pro vhodné $\mathcal{B}\in\mathfrak{B}$. Ze stejnoměrné spojitosti máme $\mathcal{A}\in\mathfrak{A}$ takové, že $\mathcal{A}\leq\{f^{-1}[B]\ |B\in\mathcal{B}\}$. Buď $A\in\mathcal{A}$, $x\in A$, buď $A\subseteq f^{-1}[B]$, $B\in\mathcal{B}$. Potom je $f(x)\in B$, tedy $B\subseteq V$ a tedy $A\subseteq f^{-1}[V]$. Máme tedy $x*A\subseteq f^{-1}[V]$. $\square$

6.3. Base z otevřených pokrytí. Pro uniformitu $\mathfrak{A}$ označme

$$\mathfrak{A}^o=\{\mathcal{A}\in\mathfrak{A}\ |\mathcal{A}\text{ je otevřené pokrytí}\}.$$

6.3.1. Lemma. *Pro každou podmnožinu* M *prostoru* $(X,\mathfrak{A})$ *je*

$$M^o=\{x\ |\exists\mathcal{A}\in\mathfrak{A},\ x*\mathcal{A}\subseteq M\}$$

otevřená v $\tau(\mathfrak{A})$.

Důkaz. Buď $x*\mathcal{A}\subseteq M$. Zvolme $\mathcal{B}$ takové, že $\mathcal{B}^*\subseteq\mathcal{A}$. Potom $(x*\mathcal{B})*\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$ a tedy pro každé $y\in x*\mathcal{B}$ je $y*\mathcal{B}\subseteq x*\mathcal{A}\subseteq M$. Je tedy $x*\mathcal{B}\subseteq M^o$. $\square$

Tvrzení. $\mathfrak{A}^o$ *tvoří basi uniformity* $\mathfrak{A}$.

Důkaz. Buď $\mathcal{A}\in\mathfrak{A}$ libovolné. Zvolme $\mathcal{B},\mathcal{C}\in\mathfrak{A}$ tak, aby $\mathcal{B}^*\leq\mathcal{A}$ a $\mathcal{C}^*\leq\mathcal{B}$. Vezměme

$$\mathcal{A}^o=\{A^o\ |A\in\mathcal{A}\}.$$

Pro $x\in X$ zvolme $B\in\mathcal{B}$ tak, aby $x*\mathcal{C}\subseteq B$. Pro $y\in x*\mathcal{C}$ je $y*\mathcal{C}\subseteq(x*\mathcal{C})*\mathcal{C}\subseteq x*\mathcal{B}\subseteq A$ takže máme $x*\mathcal{C}\subseteq A^o$. Je tedy $\mathcal{C}\leq\mathcal{A}^0\leq\mathcal{A}$. $\square$

Poznámka a úmluva. Base $\mathfrak{A}$ má velmi speciální chování. Všimněte si, že pro ni platí přímo podmínky (U_{II}k), $k=0,1,2,3$ jen s tou drobnou změnou, že v ($\mathrm{U}_{II}1$) mluvíme jen o *otevřených* $\mathcal{B}\geq\mathcal{A}$. Dále, podle tvrzení 6.2.1 máme pro stejnoměrnou spojitost přímo formuli

$$\text{pro každé }\mathcal{B}\in\mathfrak{B}^o\text{ je }\{f^{-1}[B]\ |B\in\mathcal{B}\}\in\mathfrak{A}^o.$$

Proto je běžné mluvit o $\mathfrak{A}^o$ jako o uniformitě: Je to jako bychom měli především dán uniformisovatelný topologický prostor, a na všechno se díváme z hlediska jeho topologie; uniformita, jedna z možných, je pak obohacení této struktury.

Tato konvence jistě nevede k nedorozumění, a budeme ji také užívat.

6.4. Tvrzení. *Topologie podprostoru Y v $(X, \tau(\mathfrak{A}))$ se shoduje s topologií $\tau(\mathfrak{A}|Y)$.*

Stejně tak pro každý systém $(X_i, \mathfrak{A}_i)$, $i \in J$, a jeho produkt podle 6.1.2 platí, že topologie $\tau(\mathfrak{A})$ se shoduje s topologií produktu $\prod(X_i, \tau(\mathfrak{A}_i))$.

Důkaz. Tvrzení o podprostoru je triviální.

Buď nyní U otevřená v $\tau(\mathfrak{A})$. Zřejmě v definici produktu v 6.1 můžeme místo uniformit $\mathfrak{A}_i$ vzít base. Pro $x = (x_i)_i \in U$ tedy existují $\mathcal{A}_{j_i} \in \mathfrak{A}^o_{j_i}$ takové, že

$$V = x * (\{p_{i_1}^{-1}[A] \mid A \in \mathcal{A}_{i_1}\} \wedge \cdots \wedge \{p_{i_n}^{-1}[A] \mid A \in \mathcal{A}_{i_n}\}) \subseteq U$$

Jelikož jsme $\mathcal{A}_{j_i}$ volili v $\mathfrak{A}^o_{j_i}$, je V otevřená v $\prod(X_i, \tau(\mathfrak{A}_i))$ a tedy konečně je tam U okolím bodu x.

Naopak buď U otevřená v $\prod(X_i, \tau(\mathfrak{A}_i))$, $x \in U$. Tentokrát máme pro nějaká $j_1, \dots, j_n \in J$ množiny U_i otevřené v $\tau(\mathfrak{A}_i)$ takové, že $x_{j_i} \in U_i$ a tedy $\mathcal{A}_{j_i} \in \mathfrak{A}_{j_i}$ pro které $x_{j_i} * \mathcal{A}_{j_i} \subseteq U_i$. Nyní ale snadno ověříme, že $x * (\{p_{i_1}^{-1}[A] \mid A \in \mathcal{A}_{i_1}\} \wedge \cdots \wedge \{p_{i_n}^{-1}[A] \mid A \in \mathcal{A}_{i_n}\}) \subseteq U$. Tedy je U otevřená v $\tau(\mathfrak{A})$. $\square$

6.4.1. Důsledek. *Podprostory a součiny uniformisovatelných prostorů jsou uniformisovatelné.*

6.5. Pro otevřené množiny U, V v $\tau(\mathfrak{A})$ pišme $U \lhd V$ jestliže je $u * \mathcal{A}$ pro nějaké $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}^o$.

6.5.1. Lemma. *1. Je-li $U \lhd V$ je $\overline{U} \subseteq V$ (tedy, $U \prec V$, viz V.5.5).*

2. Je-li $U \lhd V$, existuje W takové, že $U \lhd W \lhd V$. Platí tedy implikace (viz V.5.5.1)

$$U \lhd V \quad \Rightarrow \quad U \prec\!\!\prec V.$$

Důkaz. 1. Buď $x \in \overline{U}$. Je $u * \mathcal{A} \subseteq V$ pro nějaké $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}^o$. Pro $A \in \mathcal{A}$ takové, že $x \in A$ je $A \cap U \neq \emptyset$ a tedy $x \in A \subseteq U * \mathcal{A} \subseteq V$.

2. Je-li $U * \mathcal{A} \subseteq V$, je pro $\mathcal{B} \in \mathfrak{A}^o$ takové, že $\mathcal{B}^* \leq \mathcal{A}$, $(U * \mathcal{B}) * \mathcal{B} \subseteq U * \mathcal{A}$. Položme tedy $W = U * \mathcal{B}$. $\square$

6.5.2. Věta. *Topologický prostor je uniformisovatelný právě když je úplně regulární a T_1.*

Důkaz. Kompaktní interval $\mathbb{I} = \langle 0, 1\rangle$ je uniformisovatelný: stačí vzít uniformitu danou basí

$$\mathfrak{A} = \{\mathcal{A}_k \mid k = 1, 2, \dots\}$$

kde $\mathcal{A}_k$ je pokrytí tvořené polootevřenými intervaly $\langle 0, \frac{1}{k}\langle$ a $\rangle 1-\frac{1}{k}, 1\rangle$, a všemi otevřenými intervaly délky $\frac{1}{k}$. Tedy podle 6.4.1 a V.5.9 je úplně regulární T_1 prostor uniformisovatelný.

Na druhé straně, buď $\mathfrak{A}$ uniformita na X a U otevřená v $\tau(\mathfrak{A})$. Pro $x \in U$ zvolme $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{A}^o$ tak, aby $x * \mathcal{A} \subseteq U$ a $\mathcal{B}^* \leq \mathcal{A}$. Potom pro $V = x * \mathcal{B}$ je $V * \mathcal{B} \subseteq x * \mathcal{A}$, tedy $V \lhd U$ a $x \in V \prec\!\!\prec U$. Podle V.5.5.2 je tedy X úplně regulární, a podle (U_{II}) také T_1. □

6.6. Věta. *Na kompaktním Hausdorffově prostoru X existuje právě jedna uniformita, totiž systém všech otevřených pokrytí.*

Důkaz. Podle 6.5.2 (a V.6.7) nějaká uniformita $\mathfrak{A}$ existuje. Stačí tedy dokázat, že obsahuje všechna otevřená pokrytí. Buď $\mathcal{U}$ libovolné otevřené pokrytí X. Pro každý bod $x \in X$ zvolme $\mathcal{A}_x \in \mathfrak{A}^o$ takové, že $x * \mathcal{A}_x \subseteq U$ pro nějaké $U \in \mathcal{U}$. Potom je $\{x * \mathcal{A}_x \mid x \in X\}$ pokrytí a je z něho možno vybrat konečné pokrytí $x_1 * \mathcal{A}_{x_1}, x_2 * \mathcal{A}_{x_2}, \dots, x_n * \mathcal{A}_{x_n}$. Nyní je ale

$$\mathcal{A}_{x_1} \wedge \mathcal{A}_{x_2} \cdots \mathcal{A}_{x_n} \leq \mathcal{U}$$

a tedy je $\mathcal{U} \in \mathfrak{A}$. □

6.7. Poznámka a dva termíny. Zřejmě je sjednocení libovolného systému uniformit vytvářejících danou topologii τ možno rozšířit na uniformitu vytvářející opět τ (nejprve vezmeme všechna společná zjemnění konečných podsystémů, a to už je base uniformity). Na každém úplně regulárním T_1 prostoru (X, τ) tedy existuje největší uniformita. Nazývá se *jemná uniformita* prostoru (X, τ).

Jemná uniformita v nekompaktním prostoru ale nemusí sestávat ze všech otevřených pokrytí. Jinými slovy, systém všech otevřených pokrytí úplně regulárního T_1 prostoru X nemusí být nutně uniformita (potíž je s hvězdovitým zjemněním). Pokud je, říkáme, že prostor X je *parakompaktní*. Na příklad všechny metrické prostory jsou parakompaktní, což vůbec není jednoduchá záležitost (jemná uniformita tam samozřejmě nemá nic co dělat s přirozenou metrickou uniformitou, o které budeme mluvit v následujícím oddíle).

7. Uniformita a metrika

7.1. Připomeňne si označení z 1.4. Pro metriku ρ na množině X položme

$$\mathcal{A}(\rho,\epsilon) = \{\Omega(x,\epsilon) \mid x \in X\}$$

a definujme uniformitu $\mathfrak{A}(\rho)$ na X basí

$$\{\mathcal{A}(\rho,\epsilon) \mid \epsilon > 0\}$$

(že se jedná o basi uniformity je vidět velmi snadno). O uniformitě $\mathfrak{A}(\rho)$ se mluví jako o *metrické uniformitě* a o uniformním prostoru $(X,\mathfrak{A})$ takovém, že $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\rho)$ pro vhodnou metriku řekneme, že je to *metrisovatelný (uniformní) prostor*.

Poznámka. Pokud dáváme přednost uniformitám ve tvaru z definice 5.1, definujeme metrickou uniformitu $\mathcal{U}(\rho)$ basí

$$\{U(\rho,\epsilon) \mid \epsilon > 0\} \quad \text{kde} \quad U(\rho,\epsilon) = \{(x,y) \mid \rho(x,y) < \epsilon\}.$$

7.2. Uniformí struktury zavádíme k popisu stejnoměrné spojitosti. Mělo by nás tedy zajímat, zda se tento pojem nyní shoduje s tím, jak ho známe z kursu matematické analysy, totiž jako následující vlastnost zobrazení f metrického prostoru (X,ρ) do metrického prostoru (Y,σ):

$$\forall\epsilon\ \exists\delta \text{ takové, že } \rho(x,y) < \delta \ \Rightarrow\ \sigma(f(x),f(y)) < \epsilon. \tag{$*$}$$

A je tomu tak. Platí

Tvrzení. *Zobrazení $f; X \to Y$ je stejnoměrně spojité zobrazení $(X,\mathfrak{A}(\rho))$ do $(Y,\mathfrak{A}(\sigma))$ právě když pro ně platí formule $(*)$.*

Důkaz. Platí-li formule $(*)$, máme $f[\Omega(x,\delta)] \subseteq \Omega(f(x),\epsilon)$ a tedy

$$\mathcal{A}(\rho,\delta) \le \{f^{-1}[B] \mid B \in \mathcal{A}(\sigma,\epsilon)\}.$$

Naopak buď $f : (X,\mathfrak{A}(\rho)) \to (Y,\mathfrak{A}(\sigma))$ stejnoměrně spojité. Pro $\epsilon > 0$ zvolme δ tak, aby $\mathcal{A}(\rho,\delta) \le \{f^{-1}[B] \mid B \in \mathcal{A}(\sigma,\frac{\epsilon}{2})\}$. Buď $\rho(x,y) < \delta$. Pro vhodné $z \in Y$ je $\Omega(x,\delta) \subseteq f^{-1}[\Omega(z,\frac{\epsilon}{2})]$, tedy $f[\Omega(x,\delta)] \subseteq \Omega(z,\frac{\epsilon}{2})$, takže je-li $\rho(x,y) < \delta$ je $\sigma(f(x),z), \sigma(f(y),z) < \frac{\epsilon}{2}$ a konečně $\sigma(f(x),f(y)) < \epsilon$. $\square$

7.3. Uniformita $\mathfrak{A}(\rho)$ je definována již basí

$$\{\mathcal{A}(\rho, \frac{1}{n}) \; | n = 1, 2, \dots\}.$$

To je pro metrické uniformity charakteristické. Platí

Věta. *Uniformní prostor $(X,\mathcal{U})$ je metrisovatelný právě když má uniformita $\mathcal{U}$ spočetnou basi.*

Důkaz. Podle značení správně očekáváte, že budeme používat popis uniformity z 5.1. To je v tomto případě pohodlnější. Ale uvědomte si nejprve, že opravdu překlady z 5.3 zachovávají vlastnost existence spočetné base.

Nechť má uniformita $\mathcal{U}$ spočetnou basi

$$V_1, V_2, \dots, V_n, \dots \; .$$

Můžeme rovnou předpokládat, že V_n jsou symetrické. Položme $U_1 = X \times X$, $U_2 = V_1$ a dále postupujme při výběru $U_n = V_{k(n)}$ indukcí takto: je-li již U_n nalezena, zvolme $W \in \mathcal{U}$ takové, že $W \circ W \circ W \subseteq U_n$ a potom zvolme $U_{n+1} = V_{k(n+1)}$ tak, aby $k(n+1) > k(n)$ a $V_{k(n+1)} \subseteq W$. Tím jsme dostali basi

$$U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$$

takovou, že

$$U_1 = X \times X, \quad U_n^{-1} = U_n, \quad \text{a} \quad U_n \circ U_n \circ U_n \subseteq U_{n-1}.$$

Položme

- $d(x, x) = 0$
- a pro $x \neq y$, kde $(x, y) \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, $d(x, y) = 2^{-n}$, kde n je největší takové, že ještě $(x, y) \in U_n$.

Je zřejmě $d(x, y) \geq 0$ a $d(x, y) = 0$ jen když $x = y$, a $d(x, y) = d(y, x)$. Nemusí ale platit trojúhelníková nerovnost. To teď napravíme.

Definujme

$$\rho(x, y) = \inf\{\sum_{i=0}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \mid x_0 = x, \; x_m = y\}.$$

Platí

$$\frac{1}{2} d(x, y) \leq \rho(x, y) \leq d(x, y). \qquad (*)$$

Druhá nerovnost je triviální, pro první dokážeme indukcí podle m že

$$2\sum_{i=0}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \geq d(x_0, x_m).$$

Pro $m = 1$ je to zřejmé. Nechť již víme, že nerovnost platí pro m a buď $\sum_{i=0}^{m} d(x_i, x_{i+1}) = a$. Můžeme předpokládat, že $a > 0$, jinak by byly všechny x_i stejné a nerovnost by byla zřejmá. Buď k největší takové, že

$$\sum_{i=0}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{a}{2}.$$

Potom

$$\sum_{i=k+1}^{m} d(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{a}{2}$$

a podle indukčního předpokladu je $d(x_0, x_k) \leq a$ a $d(x_{k+1}, x_{m+1}) \leq a$; triviálně $d(x_k, x_{k+1}) \leq a$. Je-li n nejmenší takové, že $2^{-n} \leq a$, máme $(x_0, x_k), (x_k, x_{k+1}), (x_{k+1}, x_{m+1}) \in U_n$ a tedy $(x_0, x_{m+1}) \in U_{n-1}$ a $d(x_0, x_{m+1}) \leq 2 \cdot 2^{-n} \leq 2a$ (zanedbaný případ, kdy $k = m$ a součet $\sum_{i=k+1}^{m} d(x_i, x_{i+1})$ je prázdný – a tedy stačí použít inkluse $U_n \circ U_n \subseteq U_{n-1}$ – mohu ponechat čtenáři).

Předpis ρ je nyní již zřejmě metrika a ve značení z poznámky v 7.1 máme podle $(*)$

$$U_n \subseteq U(\rho, 2^{-n}) \subseteq U_{n-1}.$$

Je tedy $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\rho)$. $\square$

7.4. Poznámky. 1. Obecnou uniformitu $\mathcal{U}$ můžeme popsat systémem metrik. Pro každé $U \in \mathcal{U}$ zvolme

$$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$$

takovou, že

$$U_1 = X \times X, \quad U_2 = U, \quad U_n^{-1} = U_n, \quad \text{a} \quad U_n \circ U_n \circ U_n \subseteq U_{n-1}$$

a k této posloupnosti zkonstruujme metriku ρ_U jako v důkazu věty 7.3. Potom je uniformita popsána soustavou $\mathcal{U}(\rho_U)$, $U \in \mathcal{U}$, totiž tak, že vezmeme ve sjednocení společná zjemnění a dostaneme basi uniformity $\mathcal{U}$.

Na pojem uniformity se můžeme dívat jako na rozšíření pojmu metriky; všimněte si, že požadavek (U_I4) resp. ($U_{II}3$) v jistém smyslu simuluje trojúhelníkovou nerovnost.

2. Podobně jako u metrických prostorů můžeme v obecnějším uniformním kontextu mluvit o úplnosti a zúplnění. K tomu můžeme přistupovat pomocí právě popsané representace uniformit metrikami, jde to ale též přímo, a to způsobem velmi názorným (i když podrobné technické provedení by nám tuto kapitolu neúměrně rozšířilo).

Dívejme se na uniformitu $\mathfrak{A}$ (ve smyslu definice 5.2 a 6.3, pro větší názornost si také vzpomeňte na pokrytí epsilonovými koulemi z 7.1) jako na systém předepsaných přesností aproximací bodů. Cauchyovský bod je filtr F takový, že pro každé pokrytí $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ je $F \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Tedy je F něco jako systém libovolně dobrých přiblížení "bodu" menšími a menšími místy (jako jednoduchý příklad vezměme třeba systém libovolně malých otevřených intervalů kolem $\sqrt{2}$ – na reálné přímce to jsou okolí $\sqrt{2}$, na racionální přímce "ve středu nic není", ale stejně jsou to neprázdné intervaly které jako lepší a lepší přibližování bodu vypadají). Z technických důvodů se ještě požaduje, aby pro každou množinu $A \in F$ existovala $B \in F$ taková, že $B \lhd A$ (to proto, abychom na prvky filtru mohli pohlížet jako na okolí jím representovaného bodu). Uniformní prostor $(X, \mathfrak{A})$ je *úplný* jestliže každý Cauchyovský bod je "skutečný bod", t.j. bod z X representovaný systémem všech okolí, a zúplnění se dosáhne tím, že se k bodům přidají také ty Cauchyovské body, které původně body nebyly.

Rejstřík

A

B

C

D

E

F

G

H

I

T

U

V