Úkol 2, příklad A

František Farka

21. března 2010

2. b)

Je vektor $x = (1, 1, 1, 1)$ extremální bod mnohostěnu P definovaného nerovnostmi

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 & -5 \\ -7 & -7 & -2 & -2 \\ -4 & -4 & -7 & -7 \\ -8 & -3 & -3 & -4 \\ -4 & -4 & -2 & -2 \\ 8 & -7 & -10 & -11 \\ -8 & 7 & 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -12 \\ -17 \\ -22 \\ -18 \\ -8 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Nejdříve ověříme, zda bod leží uvnitř mnohostěnu a případně na kterých fasetách:

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 & -5 \\ -7 & -7 & -2 & -2 \\ -4 & -4 & -7 & -7 \\ -8 & -3 & -3 & -4 \\ -4 & -4 & -2 & -2 \\ 8 & -7 & -10 & -11 \\ -8 & 7 & 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ -22 \\ -18 \\ -12 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -12 \\ -17 \\ -22 \\ -18 \\ -8 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Bod splňuje nerovnosti a leží tedy v mnohostěnu P. Ty nerovnosti, které splňuje jako rovnosti určují fasety na kterých leží. Vytvoříme z nich soustavu a určíme počet jejích řešení[1]. Matice pravých stran této soustavy je

[1] To se jednoduše provede Gaussovou eliminací, postup zde nebudu proto uvádět

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 & -5 \\ -4 & -4 & -7 & -7 \\ -8 & -3 & -3 & -4 \\ 8 & -7 & -10 & -11 \\ -8 & 7 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Hodnost této matice je $rank(A) = 3$, tedy řešením není jednobodovka a zadaný bod není vrchol.

3. b)

Určujeme zda je vektor $v = (0, 0, 1, 0, 0)$ vrchol mnohostěnu P definovaného nerovnostmi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

Protože ze zadání víme že v leží uvnitř mnohostěnu, zjistíme pouze na jakých fasetách:

Fasety určené podmínkami $Ax = b$ plynou přímo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A fasety určené hyperkrychlí jsou:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Matice pravých stran pro nerovnosti určující fasety pak je:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnost této matice je $rank(B) = 4$. Průnikem faset tedy není právě jeden bod, a proto bod v není vrchol.

3. c)

Omezení jsou stejná jako v b), zjišťujeme, zda je vrcholem bod $w = (0, 1, 1, -1, 0)$. Opět určíme fasety:

Tyto plynou ze zadání:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A fasety určené hyperkrychlí jsou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

řádky 2,3 a 4. Matice pravých stran pro fasety je tedy

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Její hodnost je $rank(C) = 5$. Průnikem faset je tedy právě jeden bod a proto je w vrchol. Jako vektor c optimalizační úlohy zvolíme normálu na stěnu hyperkrychle $c = (0, -1, -1, 1, 0)$, proto bude w optimem.